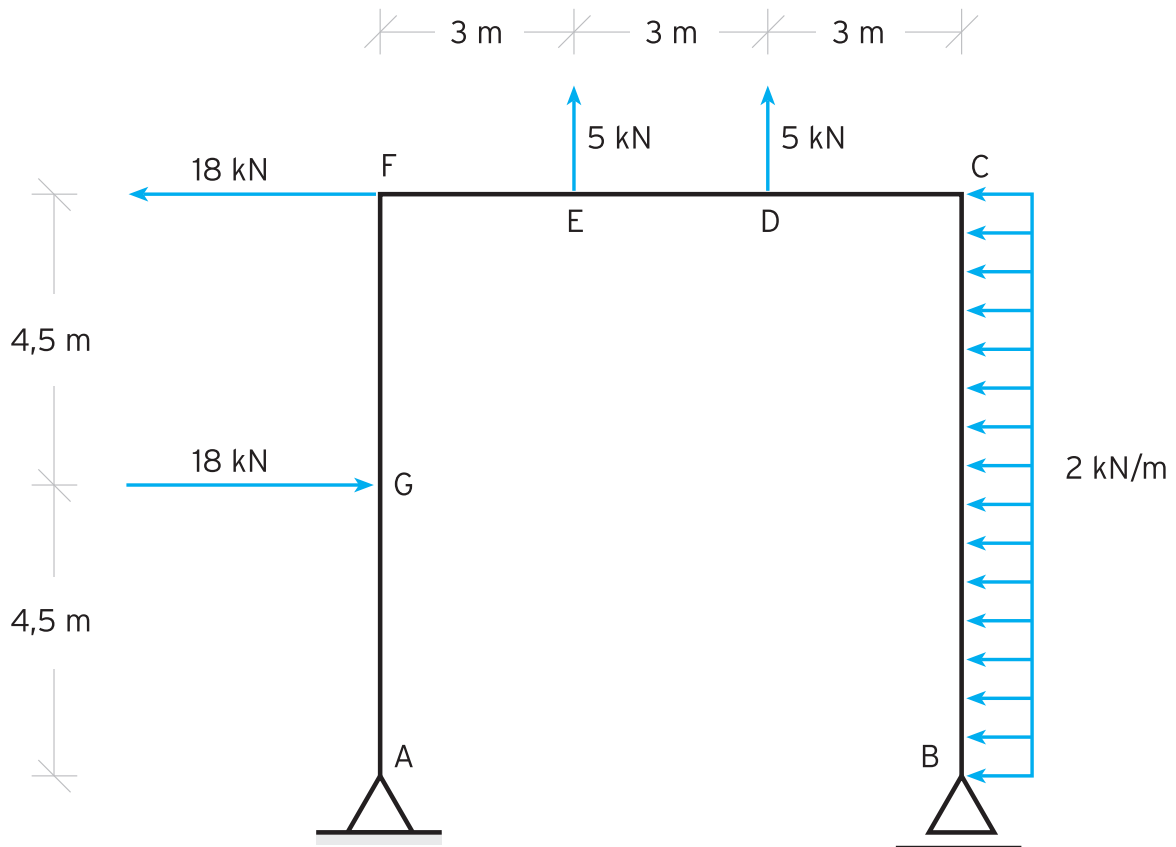




PROBLEMA

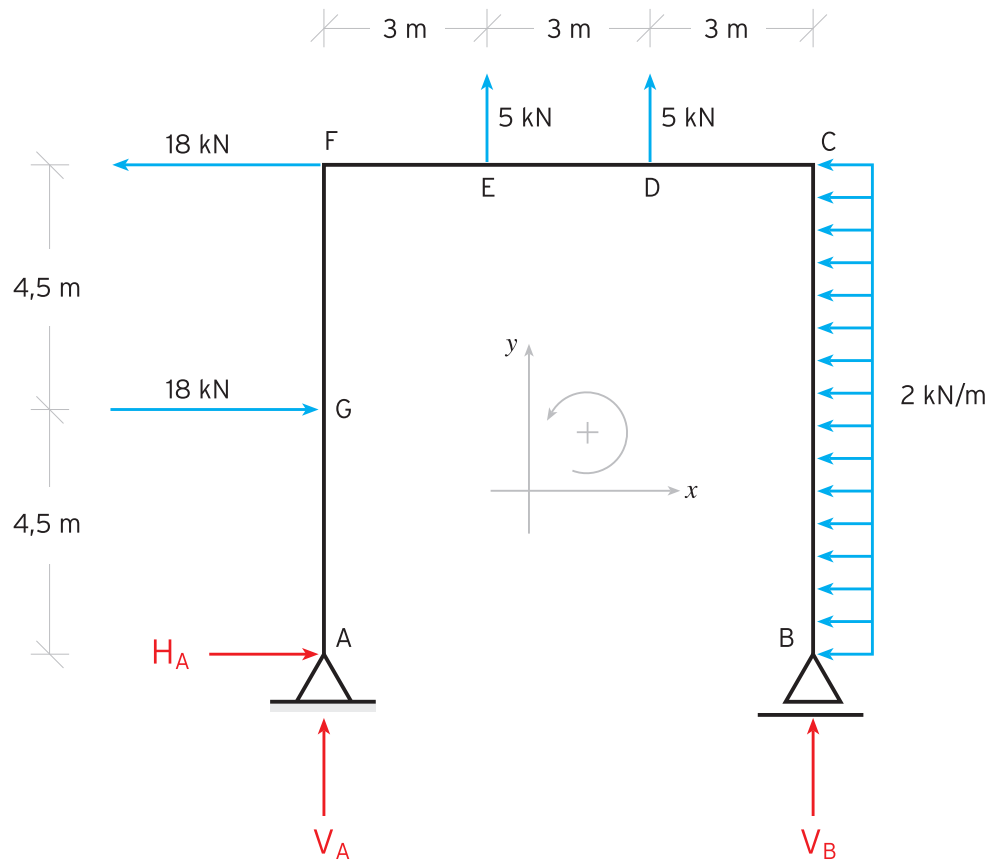
Analisar a estrutura seguinte quanto aos esforços internos e desenhar os respectivos diagramas de esforços normais, cortantes e fletores.



1. CÁLCULO DAS REACÇÕES NOS APOIOS

Análise da Estrutura total

Diagrama de Corpo Livre da Estrutura total



Equações do Equilíbrio Estático

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H_A + 18 - 18 - 2 \times 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow H_A = 18 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4,5 \times 18 + 9 \times 18 + 3 \times 5 + 6 \times 5 + 4,5 \times 2 \times 9 + 9V_B = 0$$

$$\Leftrightarrow V_B = -23 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_A + 5 + 5 + V_B = 0$$

$$\Leftrightarrow V_A = -10 - V_B = -10 - (-23)$$

$$\Leftrightarrow V_A = 13 \text{ kN}$$

Análise individual das barras da estrutura

Diagrama de Corpo Livre da Barra AF

Equações do Equilíbrio Estático

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -V_F - 18 + 18 + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow V_F = 18 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -N_F + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow N_F = 13 \text{ kN}$$

$$\sum M_F = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -M_F + 4,5 \times 18 + 9 \times 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow M_F = 243 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

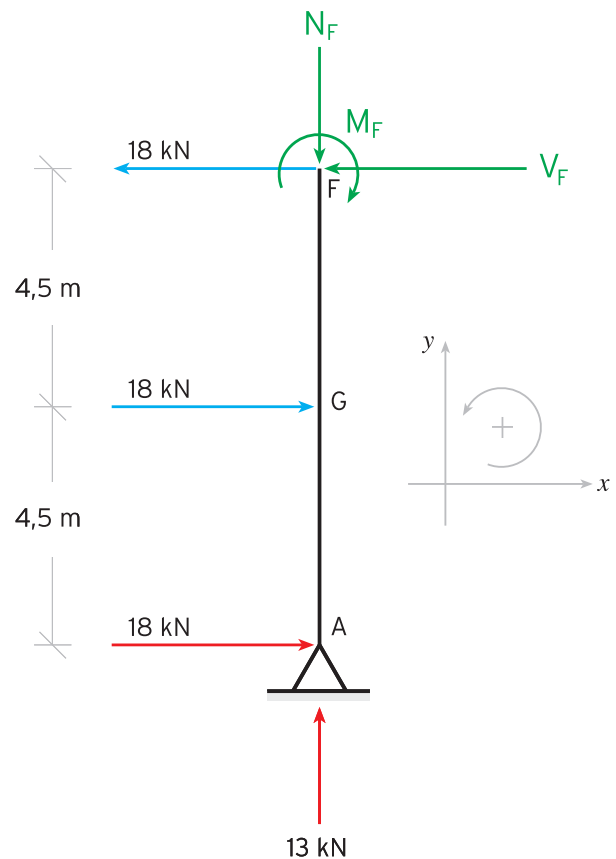
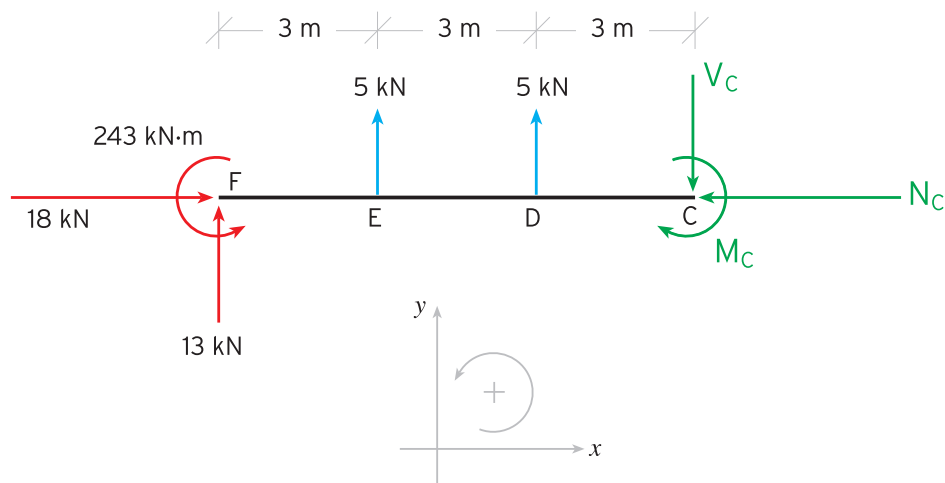


Diagrama de Corpo Livre da Barra FC



Condições de Equilíbrio Estático

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -N_C + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow N_C = 18 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -V_C + 13 + 5 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow V_C = 23 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -M_C + 243 - 9 \times 13 - 6 \times 5 - 3 \times 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow M_C = 81 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

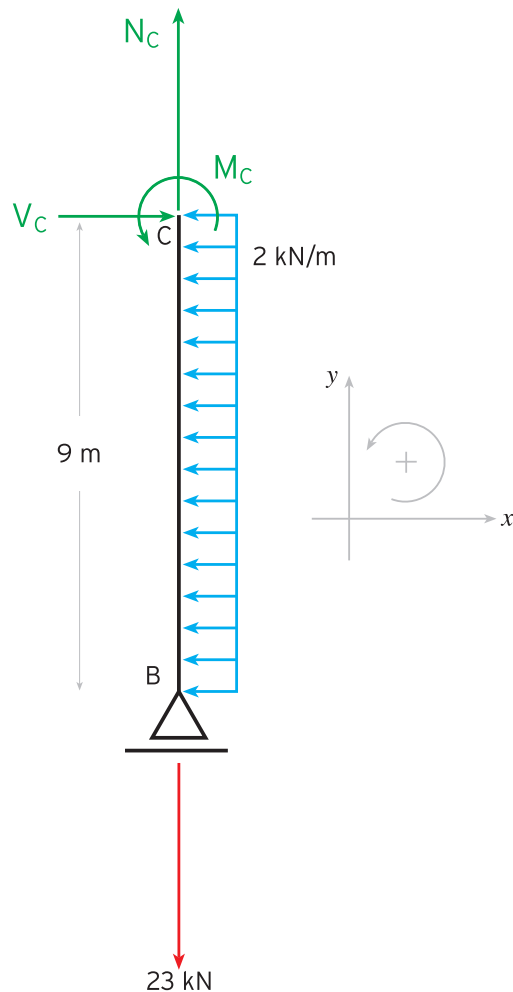
Diagrama de Corpo Livre da Barra BC
(cálculo de confirmação)

Condições de Equilíbrio Estático

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V_C - 2 \times 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow V_C &= 18 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow N_C - 23 &= 0 \\ \Leftrightarrow N_C &= 23 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow M_C - 4,5 \times 2 \times 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow M_C &= 81 \text{ kN} \cdot \text{m}\end{aligned}$$



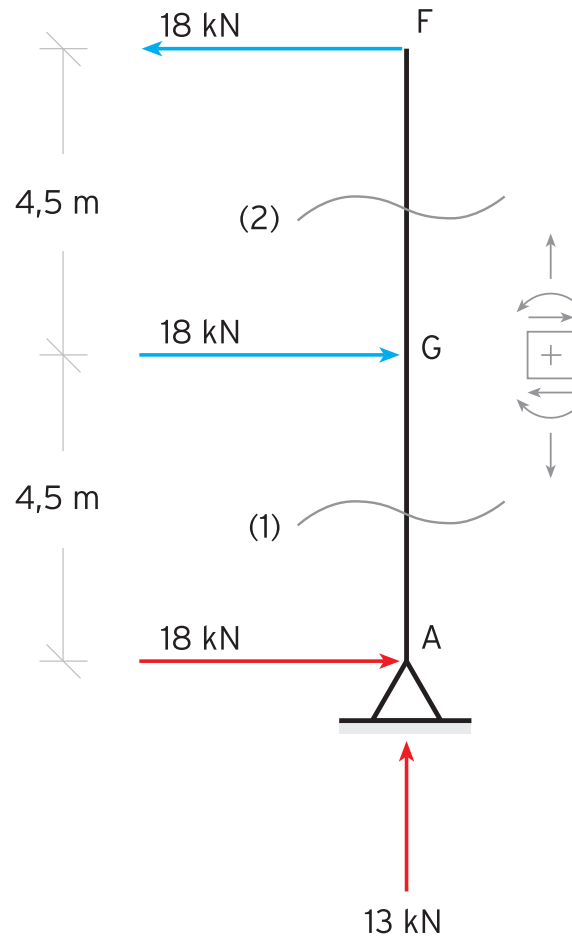
COMENTÁRIOS:

Em relação aos cálculos anteriores saliente-se os seguintes factos:

- quando se analisa uma barra em separado da estrutura consideraram-se as forças e momentos externos, resultantes das cargas exercidas sobre a mesma, assim como as forças reativas, resultantes dos contatos entre a barra em análise, o solo e os outros elementos da estrutura;
- pela 3ª lei de Newton (ação-reação), as forças reativas exercidas na barra em análise pelas outras barras da estrutura deverão aparecer nestas com o mesmo valor e sentido contrário;
- em relação à barra BC repare-se que o esforço cortante exercido no ponto C (V_C) é igual em valor e de sentido contrário ao esforço normal exercido na barra FC (N_C) no mesmo ponto. De igual modo, o esforço normal aí exercido na barra BC, é igual em valor e de sentido contrário ao esforço cortante exercido na barra FC. A notação aqui usada pode prestar-se a alguma confusão! De modo a evitar esse problema existem notações um pouco mais elaboradas, por exemplo, fazendo explicitamente referência à barra em questão por meio de um índice numérico. Assim, atribuindo um número a cada barra, por exemplo barra BC = 1 e barra FC = 2, o que dissemos atrás ficaria, $V_{C1} = N_{C2}$ e $N_{C1} = V_{C2}$. Isto é particularmente importante de referir dado que, no caso concreto aqui assinalado, o que é um esforço cortante numa barra transforma-se num esforço axial na outra porque a ligação entre as barras é perpendicular;
- O cálculo relativo à última barra é desnecessário e foi realizado apenas para confirmar os resultados já obtidos dos cálculos anteriores.

2. CÁLCULO DOS ESFORÇOS INTERNOS ATUANTES NAS BARRAS

BARRA AF



Corte (1)

$$N(A) = N(x) = -13 \text{ kN}, \quad 0 \leq x < 4,5 \text{ m}$$

$$V(A) = V(x) = V(G^-) = -18 \text{ kN}, \quad 0 \leq x < 4,5 \text{ m}$$

$$M(A) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M(x) = -18x \text{ (kN} \cdot \text{m)}, \quad 0 \leq x < 4,5 \text{ m},$$

$$M(G) = -18 \times 4,5 = -81 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Corte (2)

$$N(G) = N(x) = -13 \text{ kN}, \quad 4,5 \leq x < 9 \text{ m}$$

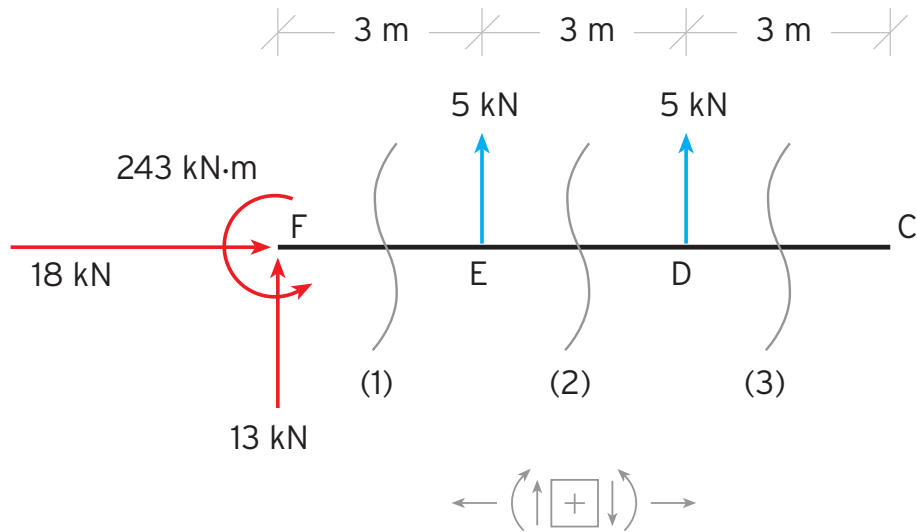
$$V(G) = V(x) = V(F^-) = -18 - 18 = -36 \text{ kN}, \quad 4,5 \leq x < 9 \text{ m}$$

$$V(F) = -36 + 18 = -18 \text{ kN}$$

$$M(x) = -18x - 18(x - 4,5) = -36x + 81 \text{ (kN} \cdot \text{m)}, \quad 4,5 \leq x < 9 \text{ m},$$

$$M(F) = -36 \times 9 + 81 = -243 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

BARRA FC



Corte (1)

$$N(F) = N(x) = -18 \text{ kN}, \quad 0 \leq x < 3 \text{ m}$$

$$V(F) = V(x) = V(E^-) = 13 \text{ kN}, \quad 0 \leq x < 3 \text{ m}$$

$$M(F) = -243 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M(x) = -243 + 13x \text{ (kN} \cdot \text{m)}, \quad 0 \leq x < 3 \text{ m},$$

$$M(E) = -243 + 13 \times 3 = -204 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Corte (2)

$$N(E) = N(x) = -18 \text{ kN}, \quad 3 \leq x < 6 \text{ m}$$

$$V(E) = V(x) = V(D^-) = 13 + 5 = 18 \text{ kN}, \quad 3 \leq x < 6 \text{ m}$$

$$M(x) = -243 + 13x + 5(x - 3) = -258 + 18x \text{ (kN} \cdot \text{m)}, \quad 3 \leq x < 6 \text{ m},$$

$$M(D) = -258 + 18 \times 6 = -150 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Corte (3)

$$N(D) = N(x) = -18 \text{ kN}, \quad 6 \leq x < 9 \text{ m}$$

$$V(D) = V(x) = V(C^-) = 18 + 5 = 23 \text{ kN}, \quad 6 \leq x < 9 \text{ m}$$

$$M(x) = -258 + 18x + 5(x - 6) = -288 + 23x \text{ (kN} \cdot \text{m)}, \quad 6 \leq x < 9 \text{ m},$$

$$M(C) = -288 + 23 \times 9 = -81 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

BARRA BC

$$N(B) = N(x) = 23 \text{ kN}, \quad 0 \leq x < 9 \text{ m}$$

$$V(B) = 0 \text{ kN}$$

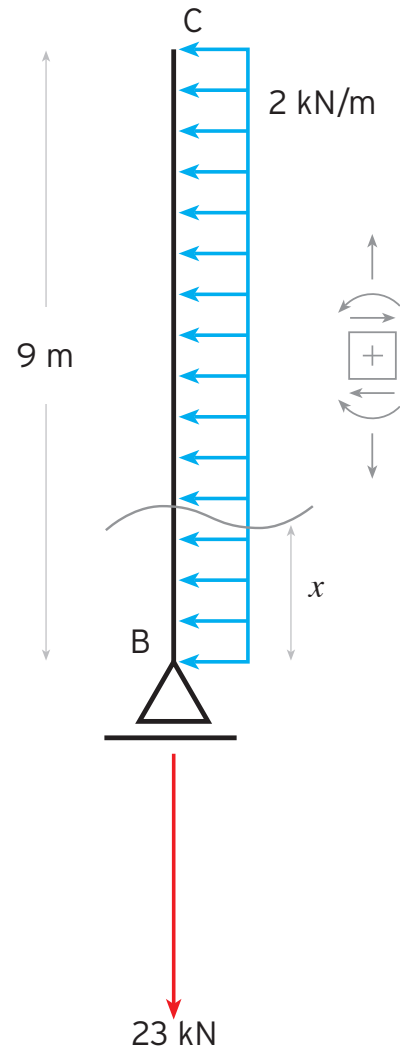
$$V(x) = 2x \text{ (kN)}, \quad 0 \leq x < 9 \text{ m}$$

$$V(C) = 2 \times 9 = 18 \text{ kN}$$

$$M(B) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M(x) = 2x \cdot \frac{x}{2} = x^2 \text{ (kN} \cdot \text{m)}, \quad 0 \leq x < 9 \text{ m},$$

$$M(C) = 9^2 = 81 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



3. DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS

Diagrama dos Esforços Axiais ou Normais (**N**)

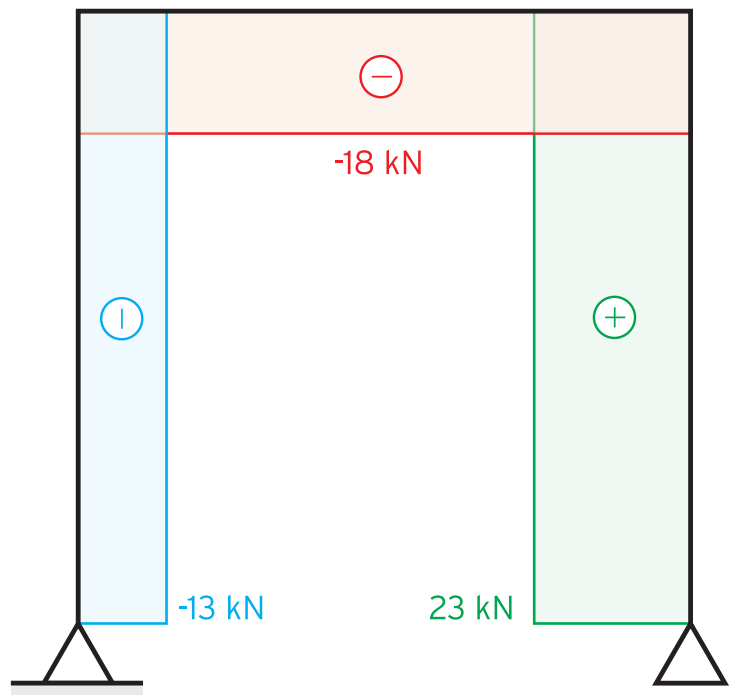


Diagrama dos Esforços Transversos ou Cortantes (**V**)

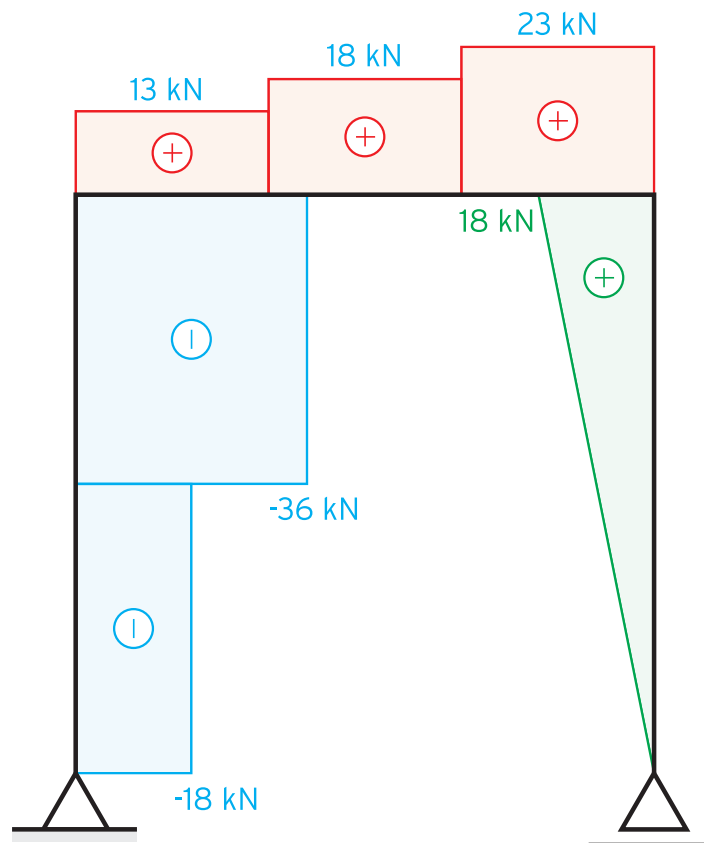
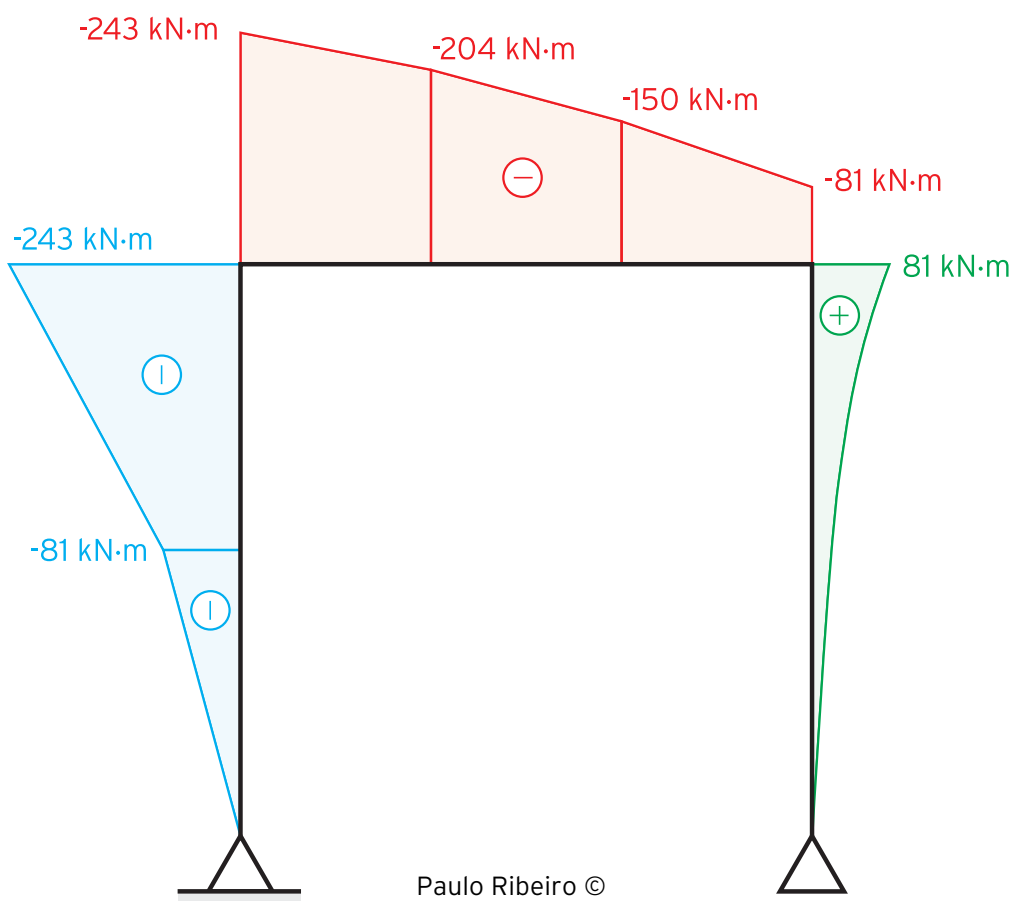


Diagrama dos Momentos Flectores (**M**)



Paulo Ribeiro ©