Transformada de Laplace

Operação linear que transforma uma função no domínio do tempo numa função de variável complexa.

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \equiv \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

$f(t)$ – função no domínio do tempo (variável real positiva ou nula, $t \in \mathbb{R}_0^+$)
$F(s)$ – função no domínio complexo ($s \in \mathbb{C}$), Transformada de Laplace da função $f(t)$.

$$\therefore f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

Transformada Inversa de Laplace

Operação linear que devolve a função no domínio do tempo a partir da Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

$$\therefore F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

Algumas propriedades da Transformada de Laplace

$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = F(s) + G(s)$	Linearidade
$\mathcal{L}\{kf(t)\} = kF(s)$	Linearidade
$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$	Translação da frequência
$\mathcal{L}\{f(t-a)\cdot u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$	Translação do tempo
$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Dilatação do tempo
$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)$	Primeira derivada
$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$	Segunda derivada
$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nf}{dt^n}\right\} = s^nF(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}f^{(i-1)}(0)$	Derivada de ordem n
$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$	Integração
$\mathcal{L}\{t^nf(t)\} = (-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$	Derivada complexa
$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	**Teorema do valor final (TVF)**
$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$	**Teorema do valor inicial (TVI)**

EXERCÍCIOS

1. Determine a Transformada de Laplace das funções seguintes, recorrendo à tabela de pares de Transformadas de Laplace e respectivas propriedades.

a) $f(t) = 5$

b) $f(t) = e^{-3t}$

c) $f(t) = 5e^{-3t}$

d) $f(t) = 5te^{-3t}$

e) $f(t) = 5t$

f) $f(t) = 4t^2$

g) $f(t) = cos\,(5t)$

h) $f(t) = 3(t-1) + e^{-(t+1)}$

i) $f(t) = 5e^{-3t}cos\,(5t)$

j) $f(t) = 5e^{-3t}cos\,(5t+1)$

k) $f(t) = sin\,(5t)$

l) $f(t) = t^2 sin\,(2t)$

m) $f(t) = cos\,(4t + \frac{\pi}{3})$

n) $f(t) = 3\delta(t)$

o) $f(t) = 3 + \delta(t)$

p) $f(t) = 3t^3(t-1) + e^{-5t}$

2. Calcule a transformada inversa de Laplace das funções seguintes usando exclusivamente as tabelas.

a) $F(s) = \frac{1}{s+1}$

b) $F(s) = \frac{5}{s+1}$

c) $F(s) = \frac{6}{s^2}$

d) $F(s) = \frac{6}{s^3}$

e) $F(s) = \frac{6}{s^2+6}$

f) $F(s) = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^2+9}$

g) $F(s) = \frac{6}{s^2+5s+6}$

h) $F(s) = \frac{6}{4s^2+20s+24}$

i) $F(s) = \frac{s+1}{s^2}$

j) $F(s) = \frac{e^{-6t}}{s^2}$

k) $F(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)}$

3. Calcule a transformada inversa de Laplace das funções seguintes usando as tabelas e a decomposição em fracções simples.

a) $F(s) = \frac{6}{s^2+5s}$

b) $F(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)}$

c) $F(s) = \frac{s}{(s-2)(s-3)}$

d) $F(s) = \frac{s+1}{s^2-5s+4}$

e) $F(s) = \frac{s+2}{s(s+3)(s+1)}$

f) $F(s) = \frac{1}{s^2+4s+3}$

g) $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$

h) $F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-3)^2}$

i) $F(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$

j) $F(s) = \frac{1}{(s-1)^3(s+2)}$

k) $F(s) = \frac{9s+4}{(s+3)^3}$

l) $F(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2+3s+2}$

m) $F(s) = \frac{s^2+3s+5}{6s^2+6s}$

n) $F(s) = \frac{s^2+2s+3}{s^2+2s+1}$

4. Resolva as equações diferenciais seguintes com condições iniciais nulas.

a) $\frac{dx}{dt} + 5x = 3$

b) $i'(t) - i(t) = 5$

c) $\dot{v} + 8v = 3t$

d) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 1$

e) $\ddot{x} + \dot{x} = sin\,(t)$

f) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = t$

g) $y''(t) + 2y'(t) = e^t$