Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. Bioquímica; Lic. Química

2^a Prova Escrita de Cálculo EC - 23 Jan

— duas horas ———————————————— 2014'15 —

Se pretender responder ao teste total, na 2^a parte terá de responder apenas às questões **6**(1,5val.), **8**(2val.), **9**(2val.) e **10**(2,5val.).

Indique qual a versão que está a resolver: <u>**teste total**</u> ou <u>**2^a parte**</u>. Na ausência desta indicação, supõe-se que está apenas a resolver a 2^a parte.

Justifique todas as suas respostas

1^a Parte

1. (1,5 valores) Mostre, por indução matemática, que

$$5^{2n} - 7^n \text{ é um múltiplo de } 9, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. (2 valores) Para cada um dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que se segue,

$$A =]0,2] \cap \mathbb{Q}, \qquad B = [1,5] \setminus \{\pi\},$$

determine o *interior*, a *aderência* e a *fronteira*.

3. (2 valores) Determine, ou justifique que não existe, a função inversa de

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,2] \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sen} x + \cos x \end{array}.$$

4. (2,5 valores) Considere a função $f(x) = \dfrac{e^{x^2} + x}{x+1}$.

   (a) Determine o domínio de f e justifique que é uma função contínua;

   (b) Justifique que f não possui zeros;
   Sugestão: Note que $e^{\alpha} \geq \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$.

   (c) Uma vez que $f(-2) < 0 < f(0)$, justifique porque é que não se pode usar o teorema de Bolzano para se conluir que f possui um zero no intervalo $]-2,0[$.

$\boxed{2^{\text{a}}\ \textbf{Parte}}$

5. (1 valores)

   (a) Determine o polinómio de Taylor de ordem 5, em torno do ponto $x = 0$, da função $f(x) = \operatorname{ch} x$.

   (b) Obtenha uma aproximação para $\operatorname{ch} 1$.

6. (1 valores) Considere a função $F : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(y)\, dy \quad \text{onde} \quad f(y) = \begin{cases} y, & y \leq 1 \\ 2, & y > 1 \end{cases}.$$

   (a) Justifique que F não é derivável em $x = 1$;

   (b) Determine a função derivada de F.
   Nota: Não se esqueça de justificar e de indicar o domínio de F'.

7. (1,5 valores) Calcule cada um dos integrais indefinidos que se segue:

$$\text{(a)} \int x(x^2 - 3)^3\, dx; \qquad \text{(b)} \int x \operatorname{ch}(x)\, dx.$$

8. (1 valores) Fazendo a substituição $x = \ln(y^2 + 1)$, calcule o integral indefinido

$$\int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{x} - 1}}\, dx,$$

   indicando o domínio e o contradomínio da função substituição.

9. (1 valores) Calcule a área da região, $\mathcal{R}$, definida por

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -x^2 + 2,\ \ y \geq x^2,\ \ y \leq -x + 2 \right\}.$$

10. (1,5 valores) Resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{1}{x^2} y(x) = 2x \mathrm{e}^{x^{-1}} \\ \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

11. (1 valores) Estude a convergência da seguinte série numérica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Fim