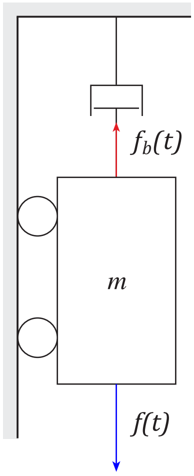
Exercício 1: Considere o sistema que se segue (o componente associado a *b* corresponde ao atrito viscoso).

a. Determine a equação diferencial que relaciona a velocidade da massa *v(t)* com a força exercida na massa *f(t)*.

ENTRADA - $f(t)$
SAÍDA - $v(t)$

$k = 0{,}5\ \mathrm{N/m}$
$b = 2\ \mathrm{Ns/m}$
$m = 0{,}5\ \mathrm{kg}$



Aplicando a 2ª lei de Newton:

$$f(t) - f_b(t) = m \cdot a(t)$$

sendo,

$$f_b(t) = b \cdot v(t)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

vem:

$$f(t) = m\frac{dv(t)}{dt} + bv(t)$$

b. Determine a função de transferência do sistema.

$$f(t) = m\frac{dv(t)}{dt} + bv(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = m\,s\,V(s) + b\,V(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(s) = (ms+b)V(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms+b} = \frac{\frac{1}{m}}{s+\frac{b}{m}} = \frac{\frac{1}{0{,}5}}{s+\frac{2}{0{,}5}} = \frac{2}{s+4}$$

portanto,

$$G(s) = \frac{2}{s+4}$$

c. Faça um esboço da resposta do sistema quando a massa é largada a partir do repouso.

$$f(t) = mg = 0{,}5 \times 9{,}8 = 4{,}9\ \mathrm{N} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{4{,}9}{s}$$

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{2}{s+4} \Leftrightarrow$$

$$V(s) = \frac{2}{s+4}F(s) = \frac{2}{s+4} \times \frac{4{,}9}{s} = \frac{9{,}8}{s(s+4)} = \frac{9{,}8}{4}\,\frac{4}{s(s+4)} = 2{,}45\frac{4}{s(s+4)}$$

isto é:

$$V(s) = 2{,}45\frac{4}{s(s+4)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} v(t) = 2{,}45\left(1 - e^{-4t}\right)\ \mathrm{m/s}$$

portanto,

$$v(t) = 2{,}45\,(1 - e^{-4t})\ \text{m/s}$$

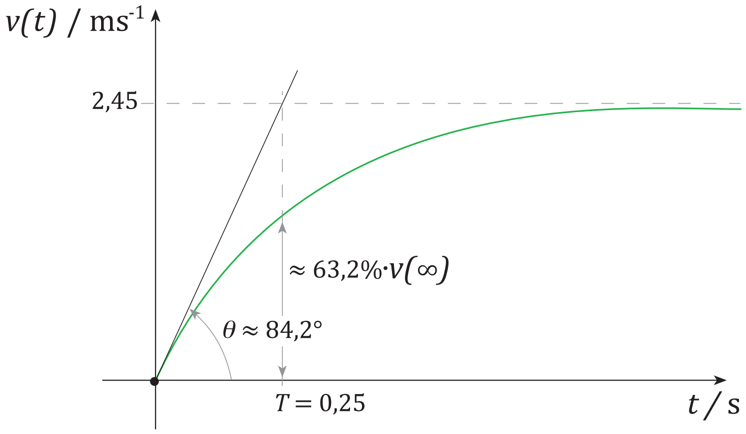
$\therefore$

$v'(t) = a(t) = 2{,}45 \times 4e^{-4t} = 9{,}8e^{-4t}\ \text{m/s}^2 \Longrightarrow$

$v'(0) = a(0) = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ (aceleração inicial do movimento)

$T = \dfrac{1}{4} = 0{,}25\ \text{s}$ (constante de tempo)

$v'(0) = \tan\theta = 9{,}8 \Longrightarrow \theta \approx 84{,}17°$



Exercício 2: Considere o sistema que se segue representado pela sua função de transferência.

$$G(s) = \frac{1}{2s + k}$$

a. Determine os valores de k que tornam o sistema anterior estável do ponto de vista dinâmico.

POLOS: $2s + k = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{k}{2}$

Para que o sistema seja dinamicamente estável os seus polos devem existir no semiplano complexo esquerdo, o que significa que a sua parte real deve ser negativa, logo:

$s = -\dfrac{k}{2} < 0 \Leftrightarrow k > 0$

portanto,

$$k \in \,]0, +\infty[$$

b. Sem inverter a transformada de Laplace determine os valores final e inicial da resposta do sistema a uma entrada de valor igual a 7… Considere neste caso k = 2.

$$x(t) = 7 \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{7}{s} \quad \therefore \quad Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{1}{2s+2} \times \frac{7}{s} = \frac{7}{2(s+1)s}$$

Usando os teoremas do valor inicial e final, vem:

Valor Inicial: $y(0^+) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} s\dfrac{7}{2(s+1)s} = \lim_{s\to\infty} \dfrac{7}{2(s+1)} = \dfrac{7}{\infty} = 0$

Valor Final: $y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\dfrac{7}{2(s+1)s} = \lim_{s\to 0} \dfrac{7}{2(s+1)} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$