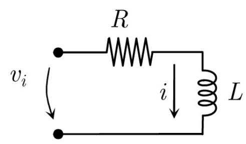
atividade: Proposta de resolução
instituição: Universidade Lusíada (Famalicão)
disciplinas: Controlo de Sistemas e Processos
tipologia: 1º Teste Intercalar (A)
data: 26 . 10 . 2010
autor: Paulo Ribeiro

SECÇÃO A

1. Faça a modelação do sistema apresentado.

ENTRADA - $v_i(t)$
SAÍDA - $v_L(t)$

$R = 2\ \text{k}\Omega = 2 \times 10^3\ \Omega$
$L = 0{,}5\ \text{H}$



Aplicando a Lei das Malhas (Kirchhoff):

$$v_i(t) = v_R(t) + v_L(t)$$

sendo,

$$v_L(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow i(t) = \frac{1}{L}\int v_L(t)dt$$

$$v_R(t) = R\,i(t) = R\,\frac{1}{L}\int v_L(t)dt$$

donde:

$$\boxed{v_i(t) = \frac{R}{L}\int v_L(t)dt + v_L(t)}$$

2. Determine a função de transferência do sistema apresentado.

$$v_i(t) = \frac{R}{L}\int v_L(t)dt + v_L(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_i(s) = \frac{R}{L}\frac{V_L(s)}{s} + V_L(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_i(s) = \left(\frac{R}{Ls} + 1\right)V_L(s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_L(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{\frac{R}{Ls}+1} = \frac{Ls}{Ls+R} = \frac{s}{s+\frac{R}{L}} = \frac{s}{s+\frac{2\times 10^3}{0{,}5}}$$

portanto,

$$\boxed{\frac{V_L(s)}{V_i(s)} = \frac{s}{s+4000}}$$

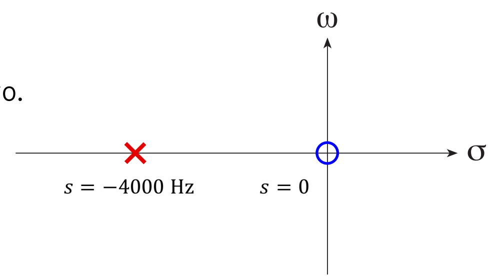
QUESTÃO ADICIONAL (NÃO INCLUIDA NA PROVA)

Determine os polos e os zeros do sistema apresentado. Represente os resultados no plano complexo (plano S).

ZEROS: $s = 0$

POLOS: $s + 4000 = 0 \Leftrightarrow s = -4000\ \text{s}^{-1}$

O sistema é estável dado que o polo é um número real negativo.



3. Determine *v(t)*, a tensão aos terminais da bobine, quando à entrada é aplicada uma tensão de 3 volts/s. Faça um esboço da resposta.

Entrada em rampa:

$$v_i(t) = 3t \text{ (V)} \xrightarrow{\mathcal{L}} V_i(s) = \frac{3}{s^2}$$

$$\frac{V_L(s)}{V_i(s)} = \frac{s}{s+4000} \Leftrightarrow$$

$$V_L(s) = \frac{s}{s+4000} V_i(s) = \frac{s}{s+4000} \times \frac{3}{s^2} = \frac{3s}{s^2(s+4000)} = \frac{3}{s(s+4000)} = \frac{3}{4000}\,\frac{4000}{s(s+4000)}$$

logo:

$$V_L(s) = \frac{3}{4000}\,\frac{4000}{s(s+4000)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} v_L(t) = 750 \times 10^{-6}\,(1 - e^{-4000t})\text{ V}$$

ou,

$$v_L(t) = 750\,(1 - e^{-4000t})\,\mu\text{V}$$

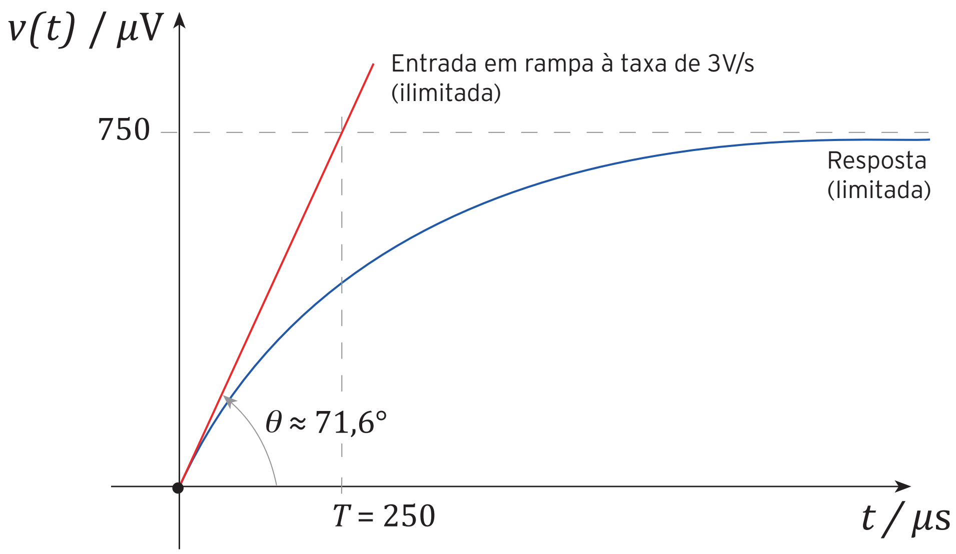
$\therefore$

$$v'_L(t) = 750 \times 4000 e^{-4000t} = 3 \times 10^6 e^{-4000t}\,\frac{\mu\text{V}}{\text{s}} \Longrightarrow$$

$$v'_L(0) = 3 \times 10^6\,\frac{\mu\text{V}}{\text{s}} = 3\,\frac{\mu\text{V}}{\mu\text{s}} \text{ (inclinação da tangente no instante inicial da resposta)}$$

$$T = \frac{1}{4000} = 250 \times 10^{-6}\text{ s} = 250\,\mu\text{s (constante de tempo)}$$

$$v'_L(0) = \tan\theta = 3 \Longrightarrow \theta \approx 71{,}6°$$



4. Determine o erro em regime estacionário.

Erro (diferença entre o sinal de entrada e o sinal de saída):

$$e(t) = v_i(t) - v_L(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(s) = V_i(s) - V_L(s)$$

Erro em regime estacionário (usando o **teorema do valor final**):

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} s\,\big(V_i(s) - V_L(s)\big) = \lim_{s\to 0} s\,\big(V_i(s) - G(s)V_i(s)\big) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s\,V_i(s)\big(1 - G(s)\big) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{3}{s^2}\left(1 - \frac{s}{s+4000}\right) = \lim_{s\to 0} \frac{3}{s}\left(\frac{4000}{s+4000}\right) = \frac{3}{0}\left(\frac{4000}{0+4000}\right) = \infty$$

SECÇÃO B

1. O que é a função de transferência de um sistema?

É o quociente entre a transformada de Laplace do sinal de saída e a transformada de Laplace do sinal de entrada, considerando todas as condições iniciais nulas. Trata-se de um modelo matemático que substitui as equações diferenciais invariantes no tempo por uma função no domínio complexo que permite expressar a relação dinâmica entre a entrada e a saída por meio de uma equação algébrica. Só é aplicável a SLITs (Sistemas Lineares Invariantes no Tempo).
A Função de Transferência é uma propriedade do sistema não dependendo, por isso, das características do sinal de entrada.

2. Para que serve a modelação matemática de um sistema?

Fundamentalmente serve o objetivo de descrever quantitativamente o comportamento do sistema através da evolução temporal das variáveis que o caraterizam.
A partir da aplicação das leis (leis de Newton, leis de Kirchhoff, "lei dos mercados"...) envolvidas na descrição dinâmica do sistema (físico, químico, biológico, financeiro...) e usadas hipóteses simplificativas válidas (com o propósito de baixar a complexidade matemática sem perda significativa de precisão preditiva), é possível obter um modelo matemático explicativo, usualmente na forma de equações diferenciais, cuja resolução analítica (raramente) ou numérica (predominantemente), conduz à previsão do comportamento do sistema perante a atuação de estímulos diversos. Em geral, pretende-se conhecer a relação genérica entre uma ação aplicada e a respetiva resposta do sistema, em função do tempo.
O modelo matemático contém, assim, o potencial para a partir das causas prever os efeitos (modelo determinista) produzidos pelo sistema em consideração sendo essa capacidade, essencialmente limitada pelo grau de aproximação do modelo à realidade (teoria), à correta identificação das variáveis determinantes e ao poder de cálculo disponível.