Exercícios de Estatística

Estatística Descritiva

1. Num estudo sobre o crescimento de crianças do sexo masculino na faixa etária do 1 aos 2 anos, foi recolhida uma amostra com o peso (em kg) de 50 meninos. Na tabela seguinte apresentam-se os dados recolhidos.

13.6	13.2	14.8	15.5	13.7	14.0	14.2	13.5	11.5	15.0
11.9	12.7	13.8	12.9	14.6	13.7	14.2	15.1	12.7	13.5
13.4	15.7	11.5	12.7	11.9	15.7	14.8	10.9	12.7	14.0
12.4	14.8	15.3	14.0	15.2	13.8	13.5	12.7	15.0	11.9
12.4	12.0	12.0	11.4	13.8	11.1	11.7	13.7	10.0	13.2

a) Usando intervalos de classes de amplitudes iguais a 0.9, determine a média, mediana, moda e desvio padrão do conjunto de valores registados.

b) Será a distribuição simétrica? Justifique.

c) Qual a proporção de meninos com menos de 13.6 Kg?

2. Na tabela seguinte estão indicadas as classificações obtidas por 80 alunos num exame de estatística.

93	76	68	84	75	82	68	90	62	88	75	85	73	79	88	73	60	93	71	59
72	63	61	65	75	87	74	62	95	78	60	68	66	78	82	75	94	77	69	74
71	83	96	78	89	61	75	95	60	79	75	71	79	62	67	97	78	85	76	65
74	53	65	80	73	57	88	78	62	76	77	85	86	67	73	81	72	63	76	75

a) Defina os intervalos para as classes.

b) Determine: moda, mediana, média, variância e desvio padrão.

c) Represente graficamente a distribuição de frequências e a distribuição de frequências relativas acumuladas.

3. Para caracterizar o absentismo de uma empresa do sector têxtil, durante um período de 70 dias fez-se o registo diário do número de faltas dos trabalhadores da empresa. De seguida apresentam-se os resultados desse registo.

0 0 2 0 0 0 3 3 0 0 1 8 5 0 0 4 3 0 6 2 2 3 1 1 0 1 0 1 1 0 1 2 1 2 0

0 1 6 4 3 3 1 2 4 0 0 3 1 2 0 0 0 0 0 1 1 0 2 0 2 4 4 0 2 2 0 2 0 0 0

a) Construa a distribuição de frequências absolutas do número de faltas por dia.

b) Determine o número médio de faltas por dia.

c) Determine a mediana, a variância e o desvio padrão do número de faltas por dia.

d) Será a distribuição do número de faltas unimodal? Justifique.

e) Qual a percentagem de dias em que houve mais do que três faltas?

f) Que conclusões pode tirar sobre a simetria da distribuição?

4. Na tabela seguinte estão contidos os dados referentes a uma amostra de 100 embalagens de detergente para lavagem manual. O peso líquido indicado nas referidas embalagens é de 750g.

752	755	725	753	764	738	757	744	747	754	741	750	757	745	754	750	729	742	754	747
755	736	744	753	721	738	732	752	745	758	740	751	746	736	741	748	735	747	727	750
743	750	732	749	745	736	733	741	749	743	748	749	737	737	749	740	724	753	738	752
747	735	743	751	726	749	741	751	745	754	753	745	749	731	746	737	741	728	750	747
747	740	741	730	739	754	739	744	755	748	759	750	756	740	745	742	730	736	750	754

a) Considere os dados apresentados na tabela e agrupe-os em células, calculando as respectivas frequências absolutas e relativas. Justifique a decisão relativa ao número de classes adoptado.

b) Com base nas células anteriormente definidas, represente graficamente a informação fornecida.

c) Calcule as medidas amostrais de localização, dispersão.

5. Considere os seguintes conjuntos de valores:

(a) 50 52 54 56 58 60 62

(b) 41 46 51 56 61 66 71

Determine, para cada um destes conjuntos, a média, a variância e o desvio padrão.

6. Considere duas turmas para as quais se indicam as idades dos seus alunos.

Idade: 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27

Frequência (turma 1): 0 4 4 6 12 10 8 0 0 0 0

Frequência (turma 2): 4 6 6 8 10 3 3 2 1 0 1

Para cada turma, determine: média, moda, mediana, variância, desvio padrão

Que conclusões pode tirar sobre a simetria da distribuição?

7. Na tabela seguinte estão indicadas as distâncias (em Km) a percorrer por um atleta de maratona durante os treinos, nas 60 semanas que precedem uma prova importante.

93	76	68	84	75	82	68	90	62	88	75	85
73	79	88	73	60	93	71	59	72	63	61	65
75	87	74	62	95	78	60	68	66	78	82	75
94	77	69	74	71	74	53	65	80	73	57	89
74	65	63	72	81	83	57	64	59	76	72	60

a) Defina os intervalos para as classes e determine: moda, mediana, média, variância e desvio-padrão.

b) Construa a distribuição de frequências e a distribuição de frequências relativas acumuladas.

8. O número de chamadas telefónicas (por minuto) recebidas em certa empresa foi registado durante um período de 50 minutos, observando-se os seguintes valores:

1 0 1 1 0 0 2 2 1 1 0 1 4 0 3 1 3 1 0 1 4 0 1 0 2

0 1 0 2 0 0 1 1 0 0 1 2 1 0 0 1 1 0 2 0 0 1 2 2 1

a) Construa a tabela de frequências da amostra (absolutas, relativas, absolutas acumuladas e relativas acumuladas).

b) Calcule aproximações para a média, mediana, moda e o desvio padrão desta amostra.

c) Desenhe o histograma de frequências. A amostra apresenta alguma assimetria? Justifique.

9. Pediu-se a 36 pessoas para classificarem o Sistema de Saúde em Portugal de acordo com a seguinte escala: 1 (péssimo), 2 (mau), 3 (pouco razoável), 4 (razoável), 5 (muito razoável), 6 (bom), 7 (muito bom), 8 (excelente). As classificações foram:

5 2 7 6 3 7 8 3 2 6 3 6 3 7 5 3 6 7

3 7 6 4 3 5 8 6 5 4 3 6 6 5 7 8 4 3

a) Proceda à organização dos dados, construindo uma tabela de frequências (absolutas,

relativas, absolutas acumuladas e relativas acumuladas).

b) Calcule aproximações para a média, mediana, moda e o desvio padrão desta amostra.

c) Desenhe o histograma de frequências. Será a distribuição de frequências unimodal? Justifique.

Que pode concluir sobre a distribuição de opiniões?

10. Um estudo feito sobre a duração de lâmpadas produzidas por determinada empresa, permitiu obter os seguintes resultados:

Duração (em horas)	0 – 40	40 - 80	80 - 120	120 - 160	160 - 200
Nº de lâmpadas	10	50	105	25	10

Construa um histograma e calcule aproximações para a média, mediana e os quartis desta amostra.

A amostra apresenta alguma assimetria? Justifique.

11. A tabela em baixo indica o consumo de combustível que um grupo de 10 instrutores de uma escola de condução obteve em cidade e em estrada a conduzir um determinado modelo de automóvel num dia de trabalho. O consumo está expresso em litros e a primeira linha representa os quilómetros percorridos até se consumirem completamente os litros indicados nas segunda e terceira linha.

Quilómetros	91	86	95	94	87	108	106	98	92	94
Estrada	6.7	6.7	7.1	7	6.9	7.3	7.4	7.2	7.1	6.5
Cidade	7.4	7.1	8.1	8.3	8	8.8	8.9	8.7	8.4	8.1

a) Calcule a média e a variância do consumo diário em cidade.

b) Qual o consumo médio aos cem quilómetros em estrada?

c) Calcule o coeficiente de correlação amostral para o ajustamento linear entre os quilómetros percorridos (variável de resposta Y) e o consumo em estrada (variável independente X).

12. A produção anual de morangos de uma estufa depende da percentagem de humidade existente. A tabela seguinte apresenta o valor dessa produção, em toneladas, em função da humidade:

Produção (ton.)	325	415	287	220	160
Humidade (%)	20	25	30	35	40

a) Quantifique a qualidade do ajuste efectuado (coeficiente de correlação amostral) e apresente as conclusões.

b) Calcule o coeficiente de determinação. Que conclusões pode tirar?

Análise de correlação e regressão linear

1. Os 4 pares de valores são relativos às variáveis: tamanho da memória (Mbytes) e bytes transferidos (Mbytes).

Tamanho de memória em Mbytes (*X*)	**Bytes transferidos em Mbytes (*Y*)**
0,238	39,058
0,286	37,938
0,334	36,531
0,381	35,484

a) Faça o diagrama de dispersão. Conclua sobre a correlação entre as duas variáveis.
b) Calcule o coeficiente de correlação de Pearson. Conclua sobre a correlação entre as duas variáveis.
c) Estime a reta de regressão linear e o coeficiente de determinação.

2. Oito programas foram monitorizados para estudar a procura por recursos. Neste trabalho, a variável resposta (dependente) é o tempo de CPU, e a variável independente é o número de acessos ao disco (disk I/O)

Tempo de CPU (Y)	**Número de acessos ao disco (X)**
2,0	14
4,6	15
5,7	23
7,3	31
9,8	38
10,9	40
12,6	53
13,2	51

a) Faça o diagrama de dispersão. Conclua sobre a correlação entre as duas variáveis.
b) Calcule o coeficiente de correlação de Pearson. Conclua sobre a correlação entre as duas variáveis.
c) Estime a reta de regressão linear e o coeficiente de determinação.

3. Para estudar a poluição de um rio, um cientista mediu a concentração de um determinado composto orgânico (Y) e a precipitação pluviométrica na semana anterior (X):

X	**Y**
0,91	0,10
1,33	1,10
4,19	3,40
2,68	2,10
1,86	2,60
1,17	1,00

Existe alguma relação entre o nível de poluição e a precipitação pluviométrica?

4. Procurando quantificar os efeitos da escassez de sono sobre a capacidade de resolução de problemas simples, um investigador selecionou ao acaso 10 sujeitos e submeteu-os a uma experiência. Deixou-os sem dormir por diferentes números de horas, após o que solicitou que os mesmos resolvessem os itens "contas de adicionar" de um teste. Obteve, assim, os seguintes dados:

No de erros - Y	**Horas sem dormir - X**
8	8
6	8
6	12
10	12
8	16
14	16
14	20
12	20
16	24
12	24

a) Calcule o coeficiente de correlação linear de Pearson
b) Determine a equação de regressão linear.

5. A tabela abaixo mostra a frequência do pulso médio em diferentes períodos etários:

Idade (anos)	Pulso (ppm)
2	112
4	104
6	100
8	92
10	88
12	86
14	84
16	80

a) Verifique se existe correlação significativa entre as variáveis.
b) Determine a equação de regressão linear.

6. Há suspeitas de que a qualidade do remédio depende do tempo de maturação despendido em sua produção. Para verificar isso, um laboratório farmacêutico recolheu os seguintes dados:

Tempo-X	Qualidade - Y
1	23
2	31
3	40
4	46
5	52
6	63

a) Represente graficamente estes pontos.
b) Calcule o coeficiente de correlação linear de Pearson.
c) Ajuste os dados através de uma reta de mínimos quadrados (modelo linear).
d) Determine o coeficiente de determinação e conclua sobre o seu resultado.

7. Numa certa população, o coeficiente de correlação entre X e Y é – 0,80.

a) Qual o significado deste valor?
b) Que percentual da variância de Y não é explicada pelas variações de X?

Probabilidades

1. Dois eventos têm $P(A)=1/4$, $P(B|A)=1/2$, e $P(A|B)=1/3$.

Calcule $P(A\cap B)$, $P(B)$, e $P(A\cup B)$.

2. Dados dois acontecimentos A e E para os quais $P(A)=0.67$, $P(E)=0.23$, e $P(A\cap E)=0.12$, encontre $P(\bar{A})$, $P(\bar{E})$, $P(A\cap\bar{E})$, $P(\bar{A}\cap E)$, e $P(A\cup E)$.

3. Um digito é seleccionado de 0, 1, 2, ..., 9. Considere os seguintes eventos:

E: o dígito é par.

T: o dígito é múltiplo de 3.

F: o dígito é múltiplo de 4.

Encontre: $P(E|F)$, $P(E|T)$, e $P(E\cup F)$.

4. Tira-se uma carta de um baralho de 52. Considere os acontecimentos relativos à experiência: A_1= {tirar um ás do baralho} e A_2= {tirar um carta de espadas do baralho}.

a) A_1 e A_2 são independentes?

b) A_1 e A_2 são mutuamente exclusivos?

c) Calcule a probabilidade de tirar um ás ou uma carta de espadas.

5. Considere a experiência aleatória que consiste no lançamento simultâneo de dois dados perfeitos e os seguintes acontecimentos

A = “soma dos resultados igual a 7”

B = “ambos os resultados são ímpares”

C = “produto dos resultados igual a 12”

Determine $P(A\cup C)$ e $P(A\cup B)$

6. No lançamento de um dado determine a probabilidade de que saia:

a) Face par, ou número primo

b) Face par e múltiplo de 3

7. Seja A e B acontecimentos independentes e P(A)=1/6 e P(B)=1/4. Determine:

a) $P(A \cap B)$, b) $P(A \cup B)$, c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, d) $P(A \cap \overline{B})$

8. Sejam A e B dois acontecimentos tais que P(A)=1/4, P(B)=2/3 e $P(A \cap B) = 1/6$. Determine

a) $P(A \cup B)$, b) $P(\overline{A})$, c) $P(\overline{B})$, d) $P(A|B)$, e) $P(B|A)$, f) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, g) $P(\overline{A}|\overline{B})$, h) $P(\overline{B}|\overline{A})$

9. Sejam M_1 e M_2 acontecimentos independentes, tais que $P(M_1 \cup M_2) = 0.8$ e $P(M_1|M_2) = 0.2$. Calcule $P(M_2)$.

10. Uma cidade de 200000 habitantes tem à sua disposição dois jornais diários: ”O Aurora” e o ”O Conhecedor”. Um inquérito revelou os seguintes dados:

− 50000 pessoas lêem diariamente ”O Aurora”;

− 40000 pessoas lêem diariamente ”O Conhecedor”;

− 5000 pessoas lêem diariamente os dois jornais.

Qual a probabilidade de ao escolhermos ao acaso um habitante desta cidade, este seja leitor:

a) De pelo menos um dos jornais.

b) De nenhum desses jornais.

c) Exclusivamente do jornal ”O Aurora”.

11. Numa população 20% das famílias têm máquina de lavar louça, 30% têm máquina de lavar roupa e 10% têm ambos os tipos de máquinas. Calcule a probabilidade de uma família escolhida ao acaso:

a) Ter pelo menos um dos tipos de máquina.

b) Não ter nenhum dos tipos de máquina.

c) Ter um só tipo de máquina.

12. Sabe-se que em relação a uma dada empresa fabril se tem para um par de produtos complementares, a seguinte situação: a probabilidade de o produto 1 ser vendido é 0.4; a probabilidade do produto 2 ser vendido é 0.5; a probabilidade do produto 1 ser vendido porque o produto 2 é vendido é 0.7.

Determine a probabilidade de:

a) Os dois produtos serem vendidos.

b) O produto 2 ser vendido porque o produto 1 é vendido.

c) Pelo menos um dos produtos ser vendido.

13. Após alguns testes efectuados à qualidade de um determinado componente eléctrico, concluiu-se que, este tem um defeito do tipo I com uma probabilidade igual a 0.6, um defeito tipo II com uma probabilidade igual a 0.7 e não tem defeitos tipo I nem defeitos tipo II com uma probabilidade de 0.25.

a) Determine a probabilidade do componente ter defeito tipo I e defeito tipo II.

b) Determine a probabilidade do componente ter apenas defeito tipo I ou apenas defeito tipo II.

c) Determine a probabilidade do componente ter defeito tipo II, sabendo que o mesmo não tem defeitos tipo I.

14. Num laboratório um investigador fez uma preparação com 3 classes de bactérias A, B e C, na proporção de 10%, 30% e 60% de cada classe, respectivamente. As bactérias da classe A reagem a sulfato em 80% dos casos, as da classe B em 60% e as da classe C em 40%.

a) Qual a probabilidade de uma bactéria escolhida ao acaso da preparação reaja ao sulfato?

b) O investigador colheu uma bactéria da preparação e ela reagiu com o sulfato. Concluiu então que a ela pertencia à classe C. Concorda com o investigador?

15. Um acidente pode ser devido a falha humana, falha de travões ou rebentamento de pneu, sendo que a 1ª causa é duas vezes mais provável que a cada uma das outras.

a) Determine a probabilidade de um acidente se dever a cada uma das causas.

b) A probabilidade de que um acidente seja correctamente atribuído a falha humana é de 80% e erradamente atribuído a essa causa é de 4%. Calcule a probabilidade de que um acidente atribuído a falha humana tenha tido essa causa.

16. Num hospital ingressaram 50% de indivíduos com a doença K, 30% com a doença L e 20% com a doença M. A probabilidade de cura da doença K é 0.7; para as doenças L e M a probabilidade é de respectivamente 0.8 e 0.9. A um doente internado foi dada alta. Calcule a probabilidade de que esse indivíduo tenha sofrido da doença K.

17. Numa instituição de atendimento ao público, existem 3 funcionários. A Ana atende 30% dos clientes e engana-se na tarefa que executa em 3% das vezes. O Manuel atende 20% dos clientes e engana-se 8% das vezes, e o Paulo atende 50% dos clientes e engana-se 5% das vezes.

a) Qual a probabilidade de se terem enganado no atendimento ao cliente?

b) Imagine que um cliente verifica que existe um erro na sua documentação depois de ter sido atendido. Determine a probabilidade de ele ter sido atendido pelo Paulo.

18. Numa determinada empresa industrial, os clientes apresentam reclamações relacionadas com dois tipos de problemas: atrasos no prazo de entrega e a má qualidade dos produtos. Foi efetuada uma análise ao livro de reclamações e verificou-se que a probabilidade de um cliente reclamar devido ao atraso no prazo de entrega é de 20%, a probabilidade de reclamar apenas devido à má qualidade dos produtos é de 15% e a probabilidade de um cliente reclamar devido ao atraso no prazo de entrega e à má qualidade dos produtos é de 15%.

a) Calcule a probabilidade de um cliente escolhido ao acaso ter reclamado devido à má qualidade dos produtos.

b) Calcule a probabilidade de um cliente escolhido ao acaso só ter reclamado devido ao atraso no prazo de entrega.

c) Calcule a probabilidade de um cliente escolhido não ter reclamado.

19. A análise da sinistralidade rodoviária do último ano revelou que, das vítimas de acidente que utilizavam cinto de segurança, 10% sofreram ferimentos graves enquanto que, entre as vítimas que não utilizavam cinto de segurança, 5% sofreram ferimentos ligeiros. Verificou-se que 75% dos automobilistas usavam o cinto de segurança.

a) Considerando um acidente em que a vítima usava cinto de segurança, qual a probabilidade de se tratar de um ferimento ligeiro?

b) Considerando um acidente de onde resultou um ferido grave, qual a probabilidade de a vítima não usar cinto de segurança?

20. Numa determinada empresa industrial, os clientes apresentam reclamações relacionadas com dois tipos de problemas: atrasos no prazo de entrega e a má qualidade dos produtos. Foi efetuada uma análise ao livro de reclamações e verificou-se que a probabilidade de um cliente reclamar devido ao atraso no prazo de entrega é de 20%, a probabilidade de reclamar apenas devido por má qualidade do produto é de 15% e a probabilidade de um cliente reclamar devido ao atraso no prazo de entrega e à má qualidade dos produtos é de 15%.

a) Calcule a probabilidade de um cliente escolhido ao acaso ter reclamado devido à má qualidade dos produtos.

b) Calcule a probabilidade de um cliente escolhido ao acaso só ter reclamado devido ao atraso no prazo de entrega.

c) Calcule a probabilidade de um cliente escolhido não ter reclamado.

21. A incidência de uma determinada doença na população de um país do quarto mundo é de 3%. Um teste disponível para detetar a doença indica um resultado positivo em 96% das pessoas que estão efetivamente doentes. Infelizmente, o teste também dá um resultado positivo em algumas pessoas que não têm a doença mas somente em 8% destas.

a)Um determinado indivíduo desse país submeteu-se ao teste e o resultado deu negativo. Qual a probabilidade de ele ter, de facto, a doença?

b) Se o teste desse positivo, qual a probabilidade de ele não ter a doença?

22. Nas eleições de um determinado país concorrem os partidos R, D e V, aos quais as sondagens atribuem 47%, 45% e 8% dos votos, respetivamente. De entre os apoiantes do partido R, D e V, concordam com a pena de morte 60%, 30% e 10%, respetivamente.

a) Qual a probabilidade de um eleitor, escolhido aleatoriamente, concordar com a pena de morte?

b) Escolhido um eleitor aleatoriamente, sabe-se que concorda com a pena de morte. Determine a probabilidade de ser um apoiante do partido R.

23. Do conjunto das grandes empresas de um dado sector industrial, sabe-se que 60% dessas empresas têm departamento de controlo de qualidade, 40% têm departamento de recursos humanos e 20% têm ambos os departamentos. Uma empresa é selecionada aleatoriamente do ficheiro de empresas do referido sector. Calcule a probabilidade de esta empresa:

a) Ter departamento de controlo da qualidade ou departamento de recursos humanos.

b) Ter apenas um destes departamentos.

Soluções

1. 1/8; 3/8; ½

2. 0.33; 0.77; 0.55; 0.11; 0.78

3. 1; 0.4; 0.33

4. a) São independentes; b) Não são mutuamente exclusivos; c) 16/52

5. 8/36; 15/36

6. a) 1; b)1/6

7. a) 1/24; b)9/24; c)15/24; d) 3/24.

8. a) 3/4; b) 3/4; c) 1/3; d) 1/4; e) 2/3; f) 1/4; g) 3/4; h) 1/3.

9. 0.75

10. a) 17/40; b) 23/40; c) 9/40

11. a) 0.4; b) 0.6; c) 0.3

12. a) 0.35; b) 0.875; c) 0.55

13. a) 0.55; b) 0.2; c) 0.375

14. a)0.5; b) sim

15. a) 0.5; 0.25; 0.25; b)0.95

16. 0.4545

Variáveis Aleatórias

1. Determinar se os valores dados podem ser usados como valores de uma função de probabilidade de uma variável aleatória na gama de valores de x=1,2,3,4.

a) f(1)=0.25 f(2)=0.75 f(3)=0.25 f(4)=-0.25

b) f(1)=0.15 f(2)=0.27 f(3)=0.29 f(4)=0.29

c) f(1)=1/19 f(2)=10/19 f(3)=2/19 f(4)=5/19

2. Determine se as funções dadas podem servir como funções de probabilidade na gama de valores dada.

a) $f(x)=\frac{x-2}{5} \quad x=1,2,3,4,5$

b) $f(x)=\frac{x^2}{30} \quad x=0,1,2,4$

c) $f(x)=\frac{1}{5} \quad x=0,1,2,3,4,5$

3. Determinar se os valores dados podem ser usados como valores de uma função de distribuição acumulada de uma variável aleatória na gama de valores de x=1,2,3,4.

a) F(1)=0.3 F(2)=0.5 (F3)=0.8 F(4)=1.2

b) F(1)=0.5 F(2)=0.4 (F3)=0.7 F(4)=1.0

c) F(1)=0.25 F(2)=0.65 (F3)=0.83 F(4)=1.0

4. Encontre a função distribuição acumulada da variável aleatória que tem a distribuição de probabilidade:

$$f(x)=\frac{x}{15} \qquad x=1,2,3,4,5$$

Apresente o respectivo gráfico.

5. A variável aleatória X tem a função de distribuição acumulada

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 1/3 & 1\le x<4\\ 1/2 & 4\le x<6\\ 5/6 & 6\le x<10\\ 1 & x\ge 10\end{cases}$$

Apresente o respectivo gráfico. Calcule:

a) $P(2<x\le 6)$;

b) $P(X=4)$;

c) $f(x)$.

6. A função densidade de probabilidade da variável aleatória contínua X é dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5} & 2<x<7\\ 0 & para\ outros\ valores\end{cases}$$

a) Desenhe o gráfico e verifique que a área total debaixo da curva é igual a 1.

b) Calcule a $P(3<x\le 7)$.

c) Determine a função distribuição acumulada e use-a para calcular a alínea b).

7. A função densidade de probabilidade da variável aleatória contínua X é dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{x}} & 0<x<4\\ 0 & para\ outros\ valores\end{cases}$$

a) Determine o valor de c.

b) Calcule $P(X<1/4)$ e $P(X\ge 1)$.

c) Determine a função de distribuição acumulada e use-a para calcular a alínea b).

8. Encontre o valor esperado da variável aleatória discreta X com a seguinte distribuição de probabilidade

$$f(x)=\frac{|x-2|}{7}\quad x=-1,0,1,3$$

9. Encontre o valor esperado da variável aleatória contínua X com a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+1) & 2 < x < 4 \\ 0 & outros\ valores \end{cases}$$

10. Considere a seguinte função densidade probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & outros\ valores \end{cases}$$

Encontre:

a) E[X];

b) VAR[X].

11. Considere a variável aleatória que representa o número de homens que fazem parte de um grupo de 6 pessoas seleccionadas aleatoriamente entre 4 mulheres e 5 homens que é definida pela seguinte função de probabilidade:

x	p(x)
2	5/42
3	20/42
4	15/42
5	2/42

a) Determine os parâmetros de localização (média, mediana e moda) e de dispersão (variância e desvio padrão) daquela variável.

Represente graficamente a função de probabilidade e a função distribuição de probabilidade da mesma variável.

b) Calcule a probabilidade de haver pelo menos 3 homens no referido grupo e a probabilidade de haver exactamente zero mulheres.

12. Considere que a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória t é dada por

$$f(t) = a + b.t \quad com\ 1 \le t \le 7$$
$$f(7) = 0$$

a) Determine os parâmetros a e b.

b) Represente graficamente a função densidade de probabilidade e a função distribuição de probabilidade da variável t .

c) Determine os parâmetros de localização (media, mediana e moda) e de dispersão (variância) para a variável t .

d) Calcule $P(t \geq 2)$.

13. Uma caixa contém as 4 cartas seguintes: o duque de paus, o terno de copas, o terno de espadas e a quina de ouros. Retiram-se duas cartas da caixa, com reposição da primeira antes de ser extraída a segunda. Considere a variável aleatória X , que representa a soma dos pontos obtidos nas duas cartas.

a) Defina as funções de probabilidade e distribuição de X.

b) Determine a média e o desvio padrão de X.

c) Calcule a probabilidade da soma dos pontos obtidos não ser superior a 5.

d) Resolva de novo as alíneas anteriores, supondo que a primeira carta não é reposta na caixa antes de se extrair a segunda.

Soluções dos exercícios sobre Variáveis Aleatórias

1. a) Não, porque f(4) é negativa; b)Sim; c) Não, porque $\sum_{x=1}^{4} f(x) > 1$

2. a) Não; b) Não; c) Não.

3. a) Não; b) Não; c) Sim

4. $$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/15 & 1 \leq x < 2 \\ 3/15 & 2 \leq x < 3 \\ 6/15 & 3 \leq x < 4 \\ 10/15 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

5. a) 1/2; b)1/6; c) $f(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 1/3 & 1\le x<4 \\ 1/6 & 4\le x<6 \\ 2/6 & 6\le x<10 \\ 1/6 & x\ge 10 \end{cases}$

6. a) $\int_2^7 1/5\,dx=1$; b)4/5; c) $F(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ \dfrac{x-2}{5} & 2\le x<7 \\ 1 & x\ge 7 \end{cases}$

7. a) 1/4; b) 1/4; 1/2; c) $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2} & 0\le x<4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$

8. 1/7

9. 37/12

10. a) 4/3; b) 2

11. a)3.33; 3; 3; 0.556; 0.745; b)37/42; 0.

12. a) a=7/18 b= -1/18; b) gráficos; c) 3; 0.5; 1; 2.03; d) 0.694

13. a) $f(x)=\begin{cases} 1/16 & x=4 \\ 4/16 & x=5 \\ 4/16 & x=6 \\ 2/16 & x=7 \\ 4/16 & x=8 \\ 1/16 & x=10 \end{cases}$ $F(x)=\begin{cases} 0 & x<4 \\ 1/16 & 4\le x<5 \\ 5/16 & 5\le x<6 \\ 9/16 & 6\le x<7 \\ 11/16 & 7\le x<8 \\ 15/16 & 8\le x<10 \\ 1 & x\ge 10 \end{cases}$ b) 6.5; 1.53;

c)5/16; d)6.5; 1.258; 4/12.

Distribuições de Probabilidade – discretas e contínuas

1. Num centro comercial está instalado um sistema de 12 máquinas para utilização de Multibanco. Considera-se que o sistema está em funcionamento se pelo menos metade dessas máquinas funcionar. Suponha que cada máquina funciona independentemente das outras e que a probabilidade de funcionamento de cada uma é de 0.6. Calcule a probabilidade de o sistema funcionar.

2. O número de automóveis que utilizam uma determinada ponte por hora segue uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 6$. Calcule a probabilidade de a ponte ser utilizada por menos de 5 automóveis num intervalo de 2 horas.

3. Uma caixa contém 6 fichas azuis e 4 vermelhas. Uma experiência consiste em extrair uma ficha, anotar a sua cor, não repondo a ficha na caixa. Determine a probabilidade de serem extraídas 3 fichas azuis em 5 extracções.

4. Se 20 % dos parafusos produzidos por uma máquina são defeituosos, determinar a probabilidade de, entre quatro parafusos escolhidos ao acaso, obter:

a) 1 parafuso defeituoso.

b) 0 parafusos defeituosos.

c) No máximo dois parafusos serem defeituosos.

d) Determine a média e o desvio padrão da distribuição.

5. Suponha que tem de realizar um teste constituído por 20 questões independentes. Cada questão tem cinco respostas alternativas, das quais apenas uma está correcta. Suponha ainda que todas as questões estão pontuadas com 1 valor. Se você decidir responder à sorte a cada uma das questões colocadas, determine:

a) A probabilidade de obter três respostas correctas.

b) A probabilidade de ser aprovado no referido teste, sabendo que para ser aprovado tem de acertar em pelo menos 9 das 20 questões.

c) A sua média de respostas correctas.

d) Por quantas questões deve o teste ser constituído para que a probabilidade de você acertar em três das questões seja de, aproximadamente, 25%.

6. A probabilidade de um estudante, que ingressa na universidade, se licenciar é de 0,4. Determine a probabilidade de, entre 5 estudantes:

a) Nenhum se licenciar.

b) Um se licenciar.

c) Pelo menos um se licenciar.

7. Se a probabilidade de um indivíduo sofrer de uma reacção nociva, resultante da injecção de um determinado soro, é 0.001, determinar a probabilidade de entre 2000 indivíduos:

a) Exactamente três sofrerem daquela reacção.

b) Mais do que 2 sofrerem daquela reacção

8. O tempo requerido para executar uma tarefa é uma variável aleatória com distribuição normal de média 72 minutos e desvio padrão de 12 minutos.

a) Calcule a probabilidade de:

i. A tarefa leve mais de 93 minutos

ii. A tarefa não levar mais de 65 minutos

iii. Leve entre 63 e 78 minutos

b) Determine o tempo t de modo que:

i. P(X>t)=0,2514

ii. P(X<t)=0,97982

9. A duração, em milhares de horas de um componente de um tipo de aparelhos de radar é uma variável aleatória *X* cuja função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \begin{cases} 0.1e^{-0.1x} & para \quad x > 0 \\ 0 & para \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Qual a probabilidade do componente durar:

a) Menos de 4×10^3 horas?

b) Entre 5×10^3 e 10×10^3 horas?

10. Suponha que o tempo que um operador leva a preencher um formulário electrónico é uniformemente distribuído entre 1.5 e 2.2 minutos.

a) Calcule a média e a variância do tempo que o operador necessita para preencher o formulário.

b) Qual a probabilidade de o operador necessitar de menos de 2 minutos para preencher o formulário?

11. As classificações de um exame de admissão a um colégio seguem uma distribuição normal de média 500 e desvio padrão 100. Determine a probabilidade de um estudante ter classificação:

a) Superior a 650;

b) Inferior a 250;

c) Entre 325 e 675.

12. O tempo de atraso de um comboio, cujo horário de partida é às 8 horas, é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal, com valor esperado de 15 minutos e desvio padrão de 4 minutos.

a) Determine a probabilidade de num qualquer dia, o comboio se atrasar no máximo 8 minutos.

b) Se um cliente chegar à estação de comboios às 8:10, qual a probabilidade de esse cliente apanhar o comboio?

13. Se as alturas de 300 estudantes são normalmente distribuídas, com média de 172,72 cm e desvio padrão 7,62 cm, quantos estudantes têm alturas:

a) Superiores a 182,88 cm

b) Iguais a 162,56 cm ou menores

c) Entre 165,10 cm e 180,34 cm inclusive

d) Iguais a 172,72 cm.

Soluções dos exercícios sobre Distribuições de Probabilidade

1. 0.8418

2. 0.0076

3. 0.4762

4. a) 0.4096; b) 0.4096; c) 0.9728; d) 0.8; 0.8

5. a) 0.2054; b) 0.01; c) 4; d) 14

6. a) 0.0778; b) 0.2592; c) 0.9222

7. a) 0.1804; b) 0.5940

8. a) i. 0.0401; ii. 0.2810; iii. 0.4649

b) i. 80.04; ii. 96.6

9. a) 0.3297; b) 0.2387

10. a) 1.85;0.041; b) 0.714

11. a) 0.0668; b) 0.0062; c)0.9104

12. a) 0.04; b) 0.894

13. a) 0.0918; b) 0.0918; 0.6826.

Intervalos de Confiança

1. Sendo X uma variável aleatória com distribuição normal e σ conhecido, deduza um intervalo de confiança para a média, utilizando uma amostra de dimensão n.

2. Seja X uma população com distribuição normal de média μ e desvio padrão igual a 2. Uma amostra aleatória de dimensão n = 25 foi extraída desta população e revelou uma média $\bar{x}$ = 78.3.

   a) Calcule o intervalo de confiança para μ a 99%.

   b) Qual a amplitude do intervalo de confiança (a 99% de confiança) ao estimar μ por $\bar{x}$ = 78.3?

   c) Qual deverá ser a dimensão da amostra para que a amplitude (a 99% de confiança), ao estimar μ por $\bar{x}$, não exceda os 0.1?

   d) Calcule o intervalo de confiança a 95% para μ.

   e) Qual o efeito de variar o grau de confiança?

   f) Qual deverá ser a dimensão da amostra para a amplitude , a 95% de confiança, ao estimar μ por $\bar{x}$ não exceda os 0.1? E a 99,9% de confiança? Interprete os resultados.

3. De uma população normal de média μ variância igual a 4, foi retirada uma amostra de 9 observações em que $\bar{x}$ = 4.

   a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a média da população.

   b) Se pretendesse reduzir para metade a amplitude do intervalo anterior como procederia? Justifique.

4. Considere uma v.a. normal de variância igual a 4. Recolheu-se a seguinte amostra:

   3, 7, 9, 10, 11, 12, 12, 14

   a) Determine um intervalo de confiança a 90% para a média.

   b) Qual deveria ser o grau de confiança a utilizar para que a amplitude do intervalo fosse 2.77?

   c) Indique a dimensão da amostra que consideraria para que a amplitude do intervalo seja inferior a um, nas condições da alínea 1.

   d) Explique sucintamente o que aconteceria se aumentasse para 99% o grau de confiança, mantendo a amostra.

5. Considere a amostra de uma v.a. normal de variância igual a 4:

20, 14, 10, 12, 6, 1, 11, 12, 15

a) Deduza e indique um intervalo de confiança, a 80%, para a média da população.

b) Qual deveria ser o grau de confiança a utilizar para que a amplitude do intervalo fosse de 2.77?

6. Uma companhia de papel quer estimar o tempo médio requerido para uma nova máquina produzir uma resma de papel. Sabe-se que uma amostra de 36 resmas requer em média cerca de 1.5 minutos/resma da máquina. Assumindo que $\sigma = 0.30$ minutos, construa um intervalo de confiança a 95%.

7. O dono de um café quer calcular o lucro médio diário por cliente. Numa amostra de 100 clientes verificou que o gasto médio por cliente era de 350 unidades monetárias (u.m.), sendo o desvio padrão dessa amostra de 75 u.m. Estime um intervalo de confiança para o verdadeiro gasto médio com 90% de confiança.

8. Uma fábrica de relógios de alta precisão pretende estudar a fiabilidade da sua produção. É escolhida uma amostra aleatória de 10 relógios. Ao fim de um mês estes relógios são confrontados com um relógio padrão e o seu desvio é registado; resulta que a média da amostra é de 0.7 segundos e o seu desvio padrão 0.4 segundos. Admitindo que a distribuição dos erros dos relógios (relativamente ao relógio padrão) é normal, que pode afirmar com 90% de confiança, quanto à fiabilidade média dos relógios da fábrica?

9. Um mini-mercado pretende estimar o número médio de litros de água que vende diariamente (fenómeno com comportamento normal), para efeitos de controlo de encomendas a fornecedores. Ao fim de 20 dias de negócio, verificou que em média vendia 32 litros de água/dia, sendo o desvio padrão desta amostra igual a 12 litros. Admitindo a normalidade, calcule os limites de confiança para um grau de confiança de 95%.

10. Com a finalidade de estimar o peso médio (em quilos) das crianças de 15 anos de idade em determinada região geográfica, seleccionaram-se aleatoriamente 10 crianças que forneceram uma média de 38.4 quilos e um desvio padrão de 5.5 quilos. Admitindo a normalidade.

a) Determine um intervalo de confiança a 95% para o peso médio de todas as crianças.

b) Considerando que a estimativa para o valor médio não é suficientemente precisa (dado que o intervalo de confiança é demasiado grande), pergunta-se: qual deve ser o tamanho da amostra para que o intervalo de confiança a 95%, tenha uma amplitude de 3 quilos?

11. Pretende-se estudar o comportamento de um rio, por isso retiraram-se 19 medições do caudal do rio em diferentes alturas do ano. Concluiu-se dessa amostra que o caudal médio é 6.94 e o desvio padrão é 1.1. Admitindo a normalidade da população.

a) Deduza um intervalo de confiança a $(1 - \alpha)100\%$ para o caudal médio do rio.

b) Obteve-se o seguinte intervalo de confiança para o valor médio do caudal

$$]6.503; 7.376[$$

Indique a confiança que deve ser atribuída a esse intervalo.

12. Pesaram-se 16 sacos de café e com os pesos observados, em gramas, construiu-se o seguinte intervalo de confiança a 95%, para o valor médio do peso de um saco:

$$]1000.74; 1009.26[.$$

a) Deduza o valor médio e o desvio padrão do peso dos sacos que constituem a amostra, admitindo a normalidade da população.

b) Para construir um intervalo de confiança com uma amplitude de 3 gramas, qual deverá ser a dimensão da amostra, mantendo-se o grau de confiança do intervalo?

13. A concentração activa de um ingrediente num detergente líquido é supostamente afetada pelo catalisador usado no processo. O desvio padrão da concentração activa é 3 gramas/litro independentemente do catalisador utilizado, sendo o comportamento do processo normal. Foram recolhidas 10 observações, cada uma com o seu catalisador:

Cat. 1	57.9	66.2	65.4	65.2	62.6	67.6	63.7	67.2	71.0	65.4
Cat. 2	66.4	71.7	70.3	69.3	64.8	69.6	68.6	69.4	65.3	68.8

Determine um intervalo de confiança a 95% para a diferença de médias dos dados obtidos nos dois catalisadores.

14. Pretende-se investigar o nível de remuneração salarial dos homens e mulheres de certa categoria profissional. De duas amostras obtidas entre dois grupos, destacam-se os seguintes resultados (em u.m.):

Amostra de 250 homens: $\bar{x}_1$ = 33.8 s21= 5.7

Amostra de 150 mulheres: $\bar{x}_2$ = 31 s22= 10.3

Construa um intervalo de confiança a 99% para as diferenças salariais médias entre os dois sexos e conclua sobre a possível existência de discriminação sexual na atribuição de remunerações.

15. Um comerciante pretende adquirir frutos de um dos pomares A ou B. Como o peso dos frutos é factor preferencial, o comerciante toma uma amostra casual de 36 frutos (em cada pomar) e escolhe o pomar que corresponde à amostra com maior peso médio. Se o peso dos frutos for normalmente distribuído, sendo:

Pomar:	Média (grs):	Desvio padrão (grs):
A	20	2
B	18	5

Qual a probabilidade do comerciante escolher o pomar B?

16. Em duas populações de cobaias de laboratório (com comportamentos normais de variâncias iguais), uma de animais do sexo masculino e outra de animais do sexo feminino, foram recolhidas duas amostras com dimensões 11 e 31 respectivamente. Os dados amostrais relativos aos pesos, em gramas, destas cobaias foram os seguintes: e

$n_1 = 11$	$\bar{x}_1 = 818$	$s_1 = 40$
$n_2 = 31$	$\bar{x}_2 = 715$	$s_2 = 50$

Considere que as populações têm com comportamentos normais de variâncias iguais (e desconhecidas). Determine um intervalo de confiança a 98% para a diferença dos pesos médios e verifique se uma das populações é, em média, mais pesada do que a outra.

17. Para avaliar a dureza de um material plástico recolheu-se a seguinte amostra de 8 elementos:

5.0; 4.9; 4.6; 5.1; 4.7; 4.8; 4.9; 5.1

Supondo a normalidade da população:

a) Indique estimadores de μ e de σ^2 e com base na amostra obtenha estimativas pontuais para cada um dos parâmetros.

b) Deduza um intervalo de confiança a 95% para a variância da população.

c) Comente, justificando, a seguinte afirmação: ”o efeito conjugado de um aumento simultâneo da dimensão da amostra e do nível de confiança, conduz obrigatoriamente à redução da amplitude de um intervalo de confiança”.

18. Suponha-se em presença de uma população normal, com parâmetros desconhecidos. Com base numa amostra casual, com 16 observações, foi construído o seguinte intervalo de confiança para a média da população:

]7.398, 12.602[.

a) Sabendo que, com a informação da amostra, se obteve s = 4, qual o grau de confiança que pode atribuir ao intervalo atrás referido?

b) Com base na mesma amostra construa um intervalo de confiança a 95% para a variância da população.

c) Suponha que a verdadeira variância da população é 44. Se pretender construir um intervalo de confiança (a 95% para a média da população) cuja amplitude não exceda 6.5, qual deverá ser a dimensão da amostra a considerar?

19. Recolheram-se 9 observações de uma v.a N (8; σ) obtendo-se os seguintes valores:

7.2; 7.8; 7.5; 8.6; 7.9; 8.3; 6.4; 8.4; 9.8

Construa um intervalo de confiança para σ^2 a 95%.

20. Considere-se uma população com distribuição Normal de parâmetros desconhecidos. Dessa população foi retirada uma amostra casual de dimensão 25. Suponha-se que a amostra forneceu os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 75 \qquad \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 321$$

Construa um intervalo de confiança a 95% para o desvio padrão.

21. A altura (em mm) da espuma de sabão numa bacia é importante para os fabricantes de detergentes e supõe-se que o seu comportamento é Normal. Foi efectuada uma experiência, colocando a mesma quantidade de detergente em 10 bacias de tamanho standard e, depois de uma certa agitação da água, mediu-se a altura da espuma. Obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 229 \qquad \sum_{i=1}^{10} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 1553$$

a) Determine uma estimativa pontual para a média e para o desvio padrão.

b) Determine um intervalo a 99% de confiança para o desvio padrão.

c) Comente os dois tipos de estimativa obtidos (nas alíneas anteriores) para o desvio padrão.

22. Num estudo de mercado foi encontrado o seguinte intervalo de confiança a 95% para a proporção de pessoas receptivas a um novo tipo de espuma de banho a lançar em breve no mercado:]0.52; 0.61[. Comente as seguintes afirmações, indicando se estas lhe parecem correctas ou incorrectas:

a) 95% das pessoas vão passar a usar a nova espuma de banho.

b) A probabilidade da nova espuma de banho alcançar uma quota de mercado de 50%, é de 0.95.

c) A quota de mercado poderá ser, com 95% de confiança, de 56.5% (valor intermédio do intervalo);

d) O resultado obtido indica apenas que é oportuno proceder ao lançamento da nova espuma de banho.

23. Numa região afectada por um surto epidémico, observou-se uma amostra de 2500 indivíduos, tendo-se encontrado 850 contaminados.

Determine intervalos de confiança a 95% e 98% de confiança para a proporção de contaminados na população.

24. Recolheu-se uma amostra de 40 alunos do 1º ano da ULusíada no ano lectivo de 2005/2006, tendo-se verificado que 10 destes alunos frequentam os cursos que escolheram em primeira opção.

a) Deduza um intervalo de confiança a 95%, para a verdadeira proporção de estudantes que está no curso que escolheu em primeira opção.

b) Se pretendesse reduzir a metade a amplitude do intervalo anterior:

i. e manter a dimensão da amostra, qual o grau de confiança que deveria utilizar?

ii. e manter o grau de confiança, indique a dimensão da amostra, que deveria utilizar?

c) Se recolhesse 200 amostras de dimensão 40 a partir da mesma população, de modo que com elas construísse 200 intervalos de confiança a 99%, quantos destes intervalos esperaria que contivessem o verdadeiro valor da proporção de estudantes em análise?

25. Em certo distrito, 840 dos 2000 eleitores inquiridos numa sondagem, declararam ir votar no plano A.

a) Deduza um intervalo a $(1-\alpha)$ 100% de confiança para a proporção de eleitores do plano A.

b) Calcule o intervalo a 95% de confiança para p.

c) Se tivessem sido inquiridos 4000 eleitores e 1680 tivessem declarado preferir o plano A, qual seria agora o intervalo a 95% de confiança. Comente os resultados.

26. Dois inquéritos realizados (em 1990 e 1999), relativamente ao consumo de bebidas alcoólicas, em idades entre os 15 e os 35 anos, forneceram os seguintes dados:

Ano	nº de inquiridos	consumidores	não consumidores
1990	4000	1750	2250
1999	5000	2250	2750

Através de um intervalo de confiança, a 98%, indique a veracidade da afirmação: “A percentagem de consumidores de bebidas alcoólicas, em indivíduos com idades compreendidas entre os 15 e os 35 anos, registou um grande aumento na década de 90.”

27. Com o objectivo de identificar factores de risco de doença coronária analisaram-se duas amostras de 215 homens e de 1140 mulheres, tendo-se registado que 58 dos homens e 217 das mulheres tinham diabetes.

Estime um intervalo de confiança a 90% para a diferença das proporções de diabéticos nas duas populações e interprete o resultado obtido.

28. Duas amostras extraídas de duas populações normais consistindo em 21 e 9 observações têm variâncias dadas por $s_1^2 = 24$ e $s_2^2 = 9$ respectivamente. Elabore um intervalo de confiança para o quociente das variâncias a 95% de confiança.

29. Para elaborar um estudo sobre o aproveitamento na disciplina de Estatística em dois cursos, analisaram-se as notas obtidas pelos alunos em cada um deles

Curso A: 41 alunos, $\bar{x}_A = 13$ $s_A^2 = 10.3$

Curso B: 61 alunos, $\bar{x}_B = 10.8$ $s_B^2 = 5.7$

a) Construa um intervalo de confiança a 95%, para a razão entre variâncias e retire conclusões sobre as dispersões de notas.

b) Utilizando um intervalo de confiança a 98%, averigúe se as médias nos dois cursos diferem de forma expressiva.

30. Para averiguar o grau de preferência dos consumidores de duas cidades em relação a uma marca de detergente, foi efectuada uma sondagem onde os inquiridos classificavam o produto numa escala de 0 a 20. Assim foram recolhidas aleatoriamente 21 opiniões de consumidores da cidade A e 11 da cidade B, sendo os resultados obtidos os seguintes:

$$\bar{x}_A = 12.9 \quad s_A^2 = 2.1$$

$$\bar{x}_B = 14.7 \quad s_B^2 = 1.8$$

Suponha um comportamento normal na distribuição de opiniões de ambas as cidades.

a) Deduza e calcule um intervalo de confiança a 95% para o quociente das variâncias das opiniões e comente o resultado obtido.

b) Indique, justificando, de que forma poderia reduzir a amplitude do intervalo anterior.

c) Verifique, justificando, se há diferença significativa (para um grau de confiança de 99%) entre as classificações médias que os consumidores das duas cidades atribuem ao referido detergente.

31. Defina estimação pontual e estimação por intervalos de confiança. Diga qual das duas será melhor, justificando.

Soluções

1. $\left]\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$

2. a)]77.2696; 79.3304[; b) 2.0608; c) n ≥ 10618; d)]77.516, 79.084[; e) −; f) n ≥ 6147 e n ≥ 17330.

3. a)]2.6933; 5.3067[; b) −.

4. a)]8.5868; 10.9132[; b) 0.95; c) n ≥ 44; d) −.

5. a)]10.3656; 12.0744[; b) 0.9624.

6.]1.402; 1.598[.

7.]337.6625; 362.3375[.

8.]0.4685; 0.9315[.

9.]26.3919; 37.6081[.

10. a)]34.4693; 42.3307[; b) n = 52.

11. a) $\left]6.94 - 0.252 t_{\alpha/2,18};\ 6.94 + 0.252 t_{\alpha/2,18}\right[$; b)0.90.

12. a) $\bar{x}$ = 1005; s = 8; b) n = 110.

13.]−5.830, −0.570[.

14.]2.021, 3.579[.

15. 0.9742.

16.]62.491, 143.51[.

17. a) $\bar{x}$ = 4.8875; s^2 = 0.0327; b)]0.0143, 0.1354[; c) −.

18. a) 0.98; b)]8.7273; 38.3387[; c) n ≥ 16.

19.]0.4373; 3.5179[.

20.]1.5609; 2.7824[.

21. a) $\bar{x}$ = 22.9; s = 13.136; b)]8.112; 29.9614[; c) −.

22. a) Falsa. b) Falsa. c)Falsa. d) Afirmação subjectiva.

23.]0.3214; 0.3586[e]0.3180; 0.3620[.

24. a)]0.1158; 0.3842[; b)i. 0.673; ii. n = 160; c) 198.

25. a) $\left]0.42 - 0.011 z_{1-\alpha/2};\ 0.42 + 0.011 z_{1-\alpha/2}\right[$; b)]0.3984; 0.4416[. c)]0.4047; 0.4353[.

26.]−0.037, 0.012[.

27.]0.0265, 0.1335[

28.]0.667, 7.760[.

29. a)]1.0385, 3.2526[.b)]0.832, 3.567[.

30. a)]0.341, 3.236[. b) −. c)]−3.247, −0.353[.

31. −.

Teste de Hipóteses

1. Os empregados de uma determinada empresa deveriam trabalhar, em média, 8h diárias.

De forma a investigar se os empregados estão a trabalhar mais do que as horas previstas, o sindicato registou o número de horas que 150 trabalhadores (escolhidos ao acaso) trabalharam num dia qualquer, tendo obtido os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{150} x_i = 1498 \quad \sum_{i=1}^{150} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 = 600$$

a) Teste ao nível de significância de 5%, se a empresa deverá ser punida por exigir que os seus empregados trabalhem mais do que deviam.

b) Qual o tipo de erro que pode cometer relativamente à decisão que tomou?

2. Numa determinada empresa pensa-se importar um grande lote de instrumentos de precisão, para os quais o fabricante garante um peso médio igual a 100 gr. Sendo o peso uma característica importante para a qualidade do produto, resolveu-se testar a veracidade da afirmação do fabricante. Para tal, o departamento técnico da empresa importadora obteve uma amostra de 15 instrumentos, através da qual se obtiveram os seguintes valores:

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 1407 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{15} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 = 1674$$

Admitindo a normalidade dos pesos, qual a sua opinião, ao nível de significância de 1%, relativamente à afirmação do fabricante.

3. Suponha que um comerciante recebeu uma remessa de ovos com a garantia de serem da classe A, isto é, ovos cujo peso segue uma distribuição normal de média igual a 55gr e desvio padrão igual a 8gr. Como o fornecedor só lhe concede 2 dias para reclamar, resolve pesar 10 ovos e escolhe para nível de significância 5%.

a) Admitindo que o peso médio dos 10 ovos é igual a 57 gr, qual a decisão que ele deve tomar?

b) Calcule a probabilidade do erro de 2ª espécie, caso o verdadeiro peso médio dos ovos seja igual a 50gr.

4. Suponha que a média dos volumes de leite de 16 embalagens retiradas aleatoriamente da linha de produção é igual a 997ml.

a) Admitindo que o desvio padrão da população, considerada normal, é igual a 5ml, teste, ao nível de 5%, a hipótese do volume médio de todos os pacotes de leite ser igual a 1 litro.
b) Admitindo que a média da população é igual a 998ml, calcule a probabilidade de aceitar a hipótese testada na alínea anterior.

5. Suponha que, numa determinada produção, o peso de sacos de café é normalmente distribuído com desvio padrão 10 gramas. Admita, ainda, que a máquina de enchimento está regulada para sacos de 500 gramas. Nestas condições, para aferir o funcionamento da máquina analisou-se uma amostra de 9 sacos aleatoriamente retirados da produção e definiu-se que se rejeitava a hipótese de bom funcionamento da máquina se média da amostra for superior a 510 gramas.

a) Calcule a probabilidade de cometer um erro de 1ª espécie.
b) Se o verdadeiro peso médio dos sacos for igual a 505 gramas, calcule a probabilidade de aceitar a hipótese de bom funcionamento.

6. Suponha que determinado canal de televisão deseja saber qual tinha sido a percentagem de pessoas que viram determinado programa. Para tal, realizou uma sondagem tendo sido inquiridas 220 pessoas, das quais 132 disseram ter visto o referido programa.

a) Determine um intervalo de confiança de nível 95% para percentagem de pessoas em toda a população que viu esse programa.
b) Qual deveria ser o número de pessoas inquiridas para se obter um intervalo de confiança de nível 95% com metade da amplitude do anterior? (Admita que a proporção das pessoas que viram o programa se mantém.)
c) Poder-se-á afirmar, ao nível de 5%, que mais de metade das pessoas viram o programa?

7. Determinada marca de óleo para carros afirma que o seu óleo é conhecido por durar, em média, 5000 km com uma variância igual a 250 000 km^2. Admitindo que o tempo de duração segue uma distribuição normal, teste a afirmação quanto à variância, a um nível de significância 5%, com base nos seguintes valores do número de quilómetros que 6 automóveis fizeram antes do óleo se queimar:

5020 6000 4500 5700 5500 4900

8. O administrador de um Hospital pretende estimar as contas em aberto (ainda não cobradas), referentes a tratamentos e internamentos. Admita que o montante de cada dívida segue uma distribuição normal e que a experiência de anos anteriores permite considerar um valor para o desvio padrão igual a 50 euros. Para levar a cabo o seu objectivo, o administrador seleccionou aleatoriamente 25 dessas contas e avaliou o seu valor, tendo obtido um total em dívida igual a 1850 euros.

a) Determine um intervalo de confiança a 95% para o montante médio de cada conta não saldada.
b) Poderá afirmar estatisticamente, ao nível de 1%, que o valor médio de cada conta não saldada é inferior a 100 euros? Que erro pode estar a cometer com a sua decisão?
c) Admitindo que o verdadeiro valor médio de cada conta não saldada é igual a 85 euros, calcule a probabilidade de cometer um erro de 2ª espécie.
d) Um valor do desvio padrão amostral, obtido com base nas 25 contas, igual a 60 euros, poderá pôr em causa, ao nível de 5%, o valor de σ considerado anteriormente?

9. Admita que a direcção comercial de uma determinada empresa pretende lançar um novo serviço de telecomunicações. De acordo com critérios empresariais, o serviço só deverá ser lançado no mercado se houver mais de 80% de potenciais compradores. Assim, para averiguar o eventual lançamento do serviço, a empresa decidiu efectuar um inquérito a 400 grandes clientes, tendo 340 sido favoráveis à aquisição do novo serviço.
Para um nível significância de 5%, poder-se-á concluir que a empresa opta pelo lançamento do serviço? E para um nível de significância de 1%?

10. Admita que uma amostra aleatória de 400 domicílios de uma determinada cidade revelou que 8% destes são casas de aluguer, enquanto que, numa outra cidade, uma amostra de 270 domicílios revelou que 37 eram casas de aluguer.

a) Construa um intervalo de confiança de nível 99% para a percentagem de casas de aluguer em cada cidade.
b) Suponha que os intervalos de confiança, obtidos na alínea anterior, sejam considerados pouco precisos. Qual deverá ser o tamanho das amostras para que o erro de estimativa não exceda 2%?
c) Poderá afirmar estatisticamente, ao nível de 5%, que há maior percentagem de casas de aluguer em alguma das duas cidades? Justifique.

11. As pilhas Duramais e Duramuito custam o mesmo preço. De forma a testar se ambas têm a mesma duração, recolheram-se duas amostras de 100 pilhas de cada marca, tendo-se obtido os seguintes resultados:

Marca	Dimensão da amostra	Média	Desvio-padrão
Duramais	100	1180	120
Duramuito	100	1160	40

Que pode concluir a um nível de significância de 5%? E a 1%?

12. Suponha que as produções médias de tecido (em gramas) de dois teares de uma fábrica se podem considerar normais. Admita, ainda que numa experiência efectuada com o objectivo de comparar esses dois teares, em termos das suas produções médias, e obtiveram os seguintes resultados:

$$Tear_1 : \sum_{i=1}^{8} x_i = 80.8\,gr \qquad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 816.664\,gr^2$$
$$Tear_2 : \sum_{i=1}^{9} y_i = 96.3\,gr \qquad \sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 1030.959\,gr^2$$

a) Ao nível de significância de 5%, teste a igualdade de variância dos teares.
b) Compare, ao nível de significância de 1%, as produções médias dos dois teares. Admita os pressupostos necessários.

13. Uma repartição de finanças tem dois funcionários a receber declarações de IRS, o Sr. Vagaroso e o Sr. Caracol. Na semana passada foi destacado um novo Director para esta repartição. Este, para ter uma ideia do tipo de atendimento ao público realizado pelos seus funcionários, resolveu consultar o livro amarelo das reclamações, onde verificou que grande parte das queixas apresentadas eram respeitantes ao atendimento demasiado moroso do Sr. Vagaroso, especialmente quando comparado com o tempo de atendimento do Sr. Caracol. Para testar a veracidade destas afirmações, o director resolveu recolher uma amostra sobre o tempo de atendimento, em minutos, despendido por cada um destes funcionários com cada utente. Os resultados amostrais obtidos foram os seguintes:

Funcionário	Dimensão da amostra	Média	Desvio-padrão
Sr. Caracol	16	22	20
Sr. Vagaroso	21	29	12

a) Teste a hipótese de igualdade das variâncias populacionais (considere $\alpha = 5\%$).

b) Supondo que os tempos de atendimento de cada um dos funcionários seguem uma distribuição normal, construa um intervalo de confiança a 99% para a diferença entre os tempos médios de atendimento dos dois funcionários. Comente os resultados a que chegou.
c) Supondo que os tempos de atendimento de cada um dos funcionários seguem uma distribuição normal, decida se o director deve ou não concordar com as queixas dos utentes, ao nível de significância de 5%.
d) Teste a hipótese da variância do tempo de atendimento do Sr. Caracol ser igual a 350, ao nível de significância de 1%.

14. Suponha que uma determinada empresa de cigarros enviou para um laboratório amostras de tabaco tratado por dois processos diferentes, tendo sido obtidos os seguintes resultados para cinco medições do conteúdo de nicotina, por mg:

Processo A	**24**	**27**	**26**	**21**	**24**
Processo B	**27**	**28**	**23**	**31**	**26**

Admitindo que os conteúdos de nicotina, por mg, seguem distribuições normais com desvios padrões iguais a 2 para o processo A e a 2.5 para o processo B, que pode concluir ao nível de 5%? E ao nível de 1%?

15. Um analista financeiro pretende comparar as rendibilidades de dois activos financeiros X e Y. Admitindo que as rendibilidades seguem uma distribuição normal com desvios padrões iguais a 0.7 e 0.5 respectivamente, que poderá concluir, ao nível de 5%, se numa amostra de dimensão 50 a rendibilidade média de X foi igual a 0.8 e a de Y igual a 0.6?

16. Uma revista de desporto afirma que as pessoas que assistem aos jogos de futebol transmitidos na TV são em igual número homens e mulheres. De forma a testar tal afirmação, recolheu-se uma amostra aleatória de 400 pessoas que assistem a transmissões futebolísticas na TV, das quais se verificou que 220 eram homens.

Que concluir acerca da notícia da revista, a um nível de significância de 10%? E a 5%?

Soluções

1. a) Z = 12.1, Rejeita-se H_0 ao nível de 5%.
b) Erro tipo I.

2. T = -2.20, Não se rejeita H_0 ao nível de 1%.

3. a) Z = 0.79, Não se rejeita H_0 ao nível de 5%.
b) β=P(Erro tipo II)=0.492.

4. a) Z = -2.4, Rejeita-se H_0 ao nível de 5%.
b) β=P(Erro tipo II)=0.6406.

5. a) α=P(Erro tipo I) = 0.0013
b) β=P(Erro tipo II) = 0.9332

6. Z = 2.97, Rejeita-se H_0 ao nível de 5%.

7. Q = 6.25, Não se rejeita H_0 ao nível de 5%.

8. a) $IC_{95\%}(\mu)$=(54.4;93.6)
b) Z = -2.6, Rejeita-se H_0 ao nível de 1%. Erro tipo I.
c) β=P(Erro tipo II) = 0.7967
d)Q = 34.56, Não se rejeita H_0 ao nível de 5%.

9. Z = 2.5, Rejeita-se H_0 ao nível de 5% e ao nível de 1%.

10. a) $IC_{99\%}$ (p_1) = (0.045; 0.115); $IC_{99\%}$ (p_2) = (0.083; 0.191).
b) n_1>1221; n_2>1962.
c) Z = -2.29, Rejeita-se H_0 ao nível de 5%.

11. Z = 1.58, Não se rejeita H_0 ao nível de 5% e, consequentemente, ao nível de 1%.

12. a) F = 1.2, Não se rejeita H_0 ao nível de 5%.
b) T = -4.49, Rejeita-se H_0 ao nível de 1%.

13. a) F = 2.78, Rejeita-se H_0 ao nível de 5%.
b) (-21.42;7.42)
c) T = -1.32, Não se rejeita H_0 ao nível de 5%.
d) Q = 17.14, Não se rejeita H_0 ao nível de 1%.

14. $Z = -1.82$, Não se rejeita H_0 ao nível de 5% e, consequentemente ao nível de 1%.

15. $Z = 1.64$, Não se rejeita H_0 ao nível de 5%.

16. $Z = 2$, Rejeita-se H_0 ao nível de 5%.

Nota: Nos testes de hipóteses deve dizer-se sempre o que significa, em cada contexto, rejeitar ou não rejeitar a hipótese testada.