Condições:

• Movimento de rotação uniforme da roda;

• Rolamento sem deslizamento.

Nomenclatura:

$\vec{\omega}$ – vetor velocidade angular (rad/s)

$\vec{r}$ – vetor posição do eixo do pedal em relação ao centro da roda (m)

$\vec{r}_P$ – vetor posição absoluta do eixo do pedal (m)

$\vec{v}_{PO}$ – vetor velocidade do pedal em relação ao centro da roda (m/s)

$\vec{v}_O$ – vetor velocidade absoluta do centro da roda (m/s)

$\vec{v}_P$ – vetor velocidade absoluta do eixo do pedal (m/s)

θ – ângulo medido do semieixo negativo dos yy até à haste do pedal, no sentido horário (rad)

R – Raio da roda (m)

r – comprimento da haste, distância do centro da roda ao eixo do pedal (m)

Introdução

Analisa-se o movimento do eixo do pedal, representado pelo ponto P da figura 1, considerando o conjunto roda, haste e eixo do pedal solidamente ligados (corpo rígido) e o movimento de rolamento da roda sem escorregamento e com rotação uniforme sobre um plano horizontal.

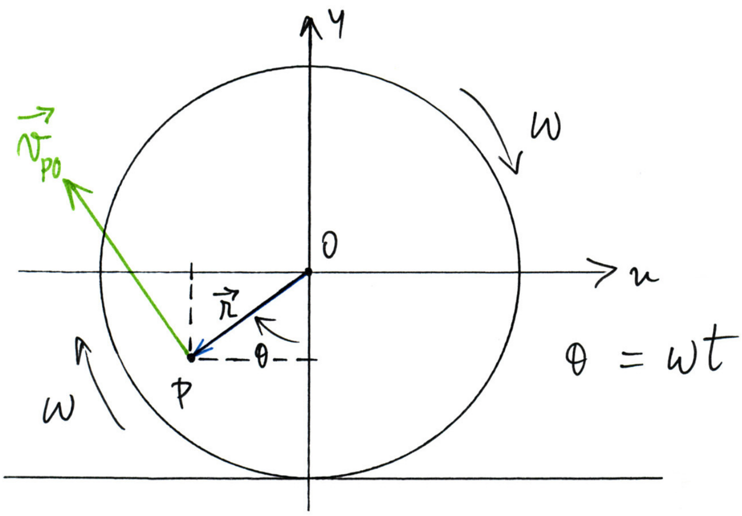

Figura 1 - Representação simplificada do conjunto roda/pedal

Sendo ω a velocidade angular de rotação da roda constante e não havendo deslizamento da mesma conclui-se que a velocidade do seu centro é retilínea e uniforme, vindo:

$$\vec{v}_O = \omega R \hat{\imath}$$

pois, ao fim de um intervalo de tempo Δt a roda terá rodado um angulo $\Delta\theta = \omega\Delta t$ tendo percorrido uma distância horizontal igual ao respetivo comprimento de arco de circunferência, $\Delta x = \Delta s = R\Delta\theta$. Assim:

$$\|\vec{v}_O\| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{R\omega\Delta t}{\Delta t} = \omega R$$

A posição do eixo do pedal em relação ao centro da roda, $\vec{r}$, dependerá da posição angular θ, medida a partir do semieixo negativo das ordenadas e no sentido horário, conforme representado na figura 1.
Sendo o movimento circular e assumindo, por simplicidade, a posição inicial do pedal no ponto mais baixo, teremos $\theta_0 = 0$, donde:

$$\theta = \omega t$$

deste modo, a posição relativa do pedal em função do tempo será (ver fig. 1):

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = -r \sin\theta\, \hat{\imath} - r \cos\theta\, \hat{\jmath} \Leftrightarrow$$

$$\vec{r} = -r \sin(\omega t)\, \hat{\imath} - r \cos(\omega t)\, \hat{\jmath}$$

Considere-se que no instante inicial a posição do eixo do pedal, ponto P, é a indicada na figura 2, em conformidade com a escolha efetuada no parágrafo anterior.
No referencial cartesiano da figura 2 (referencial fixo) destacam-se as seguintes grandezas:

- vetor velocidade angular: $\vec{\omega} = -\omega\hat{k}$
- vetor posição inicial do pedal (em relação ao referencial fixo): $\vec{r}_P(0) = (R - r)\hat{\jmath}$
- vetor velocidade absoluta do centro da roda: $\vec{v}_O = \omega R \hat{\imath}$

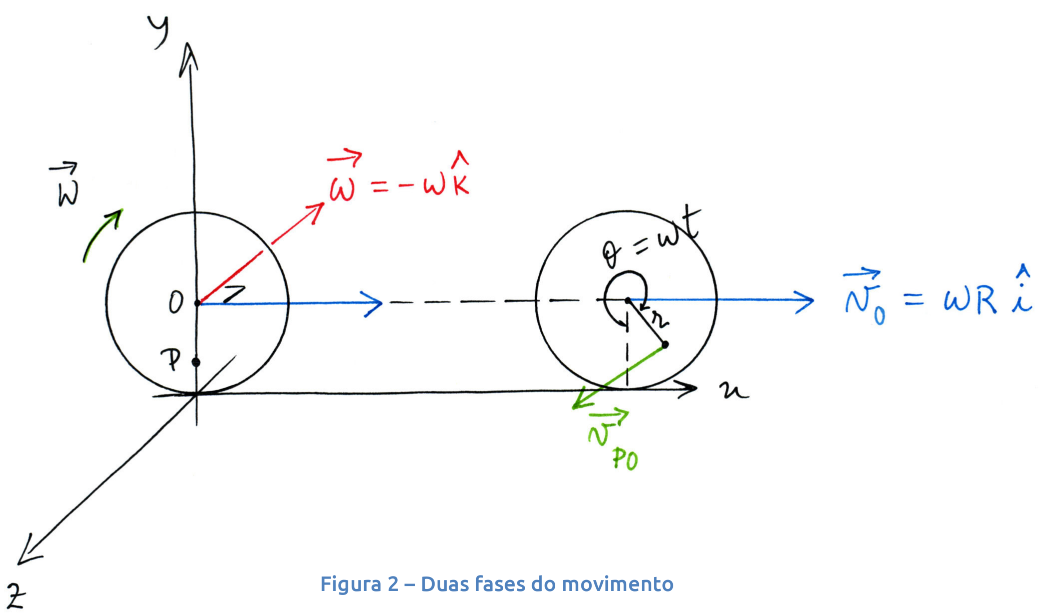

Figura 2 – Duas fases do movimento

Análise Cinemática

Velocidade

De acordo com a lei da adição das velocidades de Galileu, a velocidade absoluta (em relação ao referencial inercial da figura 2) do eixo do pedal (ponto P) será dada por:

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}_O + \vec{v}_{PO} = \\ &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} = \\ &= \omega R\hat{\imath} + \left(-\omega\hat{k}\right) \times \left(-r\, sin(\omega t)\,\hat{\imath} - r\, cos(\omega t)\,\hat{\jmath}\right) = \\ &= \ \omega R\hat{\imath} + \omega r\, sin(\omega t)\,\left(\hat{k} \times \hat{\imath}\right) + \omega r\, cos(\omega t)\,\left(\hat{k} \times \hat{\jmath}\right) = \\ &= \omega R\hat{\imath} + \omega r\, sin(\omega t)\,(\hat{\jmath}) + \omega r\, cos(\omega t)\,(-\hat{\imath}) = \\ &= [\omega R - \omega r\, cos(\omega t)]\hat{\imath} + \omega r\, sin(\omega t)\,\hat{\jmath}\end{aligned}$$

portanto:

$$\vec{v}_P(t) = \omega[R - r\, cos(\omega t)]\hat{\imath} + \omega r\, sin(\omega t)\,\hat{\jmath}$$

donde se conclui que em momento algum a velocidade se anula.
Em particular, a velocidade inicial é:

$$\vec{v}_P(0) = \omega(R - r)\hat{\imath}$$

Aceleração

Derivando a velocidade do pedal em ordem ao tempo encontramos a aceleração do mesmo:

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &= \frac{d}{dt}(\omega[R - r\, cos(\omega t)]\hat{\imath} + \omega r\, sin(\omega t)\,\hat{\jmath}) = \\ &= \omega^2 r\, sin(\omega t)\,\hat{\imath} + \omega^2 r\, cos(\omega t)\,\hat{\jmath}\end{aligned}$$

isto é:

$$\vec{a}_P = \omega^2 r\, sin(\omega t)\,\hat{\imath} + \omega^2 r\, cos(\omega t)\,\hat{\jmath}$$

donde se conclui que a aceleração é constante em módulo, igual à mesma que teria se a roda tivesse apenas rotação, sem translação uniforme:

$$\|\vec{a}_P\| = \sqrt{(\omega^2 r\, sin(\omega t))^2 + (\omega^2 r\, cos(\omega t))^2} = \omega^2 r$$

note-se, no entanto, que a aceleração tem componentes normal e tangencial à trajetória, exceto nos pontos mais baixo e mais alto onde tem apenas componente instantânea normal (ver animação).

Posição

Integrando a velocidade do pedal encontramos a respetiva lei do movimento:

$$\int_{\vec{r}_P(0)}^{\vec{r}_P(t)} \overrightarrow{dr_P} = \int_0^t \vec{v}_P(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\vec{r}_P(t) - \vec{r}_P(0) = \int_0^t \{[\omega R - \omega r\, cos(\omega t)]\hat{\imath} + \omega r\, sin(\omega t)\,\hat{\jmath}\}dt \Leftrightarrow$$

$$\vec{r}_P(t) - (R - r)\hat{\jmath} = [\omega Rt - r\, sin(\omega t)]\hat{\imath} - r\, cos(\omega t)\,\hat{\jmath} + r\hat{\jmath} \Leftrightarrow$$

$$\vec{r}_P(t) = [\omega Rt - r\, sin(\omega t)]\hat{\imath} - r\, cos(\omega t)\,\hat{\jmath} + r\hat{\jmath} + (R - r)\hat{\jmath}$$

donde:

$$\vec{r}_P(t) = [\omega Rt - r\, sin(\omega t)]\hat{\imath} + [R - r\, cos(\omega t)]\hat{\jmath}$$

ou, expressa em equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = \omega Rt - r\, sin(\omega t) \\ y(t) = R - r\, cos(\omega t) \end{cases} , \quad t \geq 0$$

A trajetória resultante é a bem conhecida **cicloide encurtada**, da família das cicloides.

Uma forma prática de visualizar uma curva cicloide é fazer uma fotografia de longa exposição de modo a observar o "rasto luminoso" deixado por um ponto de luz (uma lâmpada LED, por exemplo) colocado na roda de uma bicicleta em movimento.

Exemplo

Sem perda de generalidade, considere-se o exemplo seguinte

$$\left.\begin{matrix} R = 1 \\ r = 0{,}4 \\ \omega = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = t - 0{,}4\sin(t) \\ y(t) = 1 - 0{,}4\cos(t) \end{cases} , \quad t \geq 0$$

cuja simulação, desenvolvida na aplicação Graphing Calculator 4.0 da Pacific Tech ©, se apresenta em anexo, estando representados em cada instante os vetores velocidade, a azul, e aceleração, a vermelho.

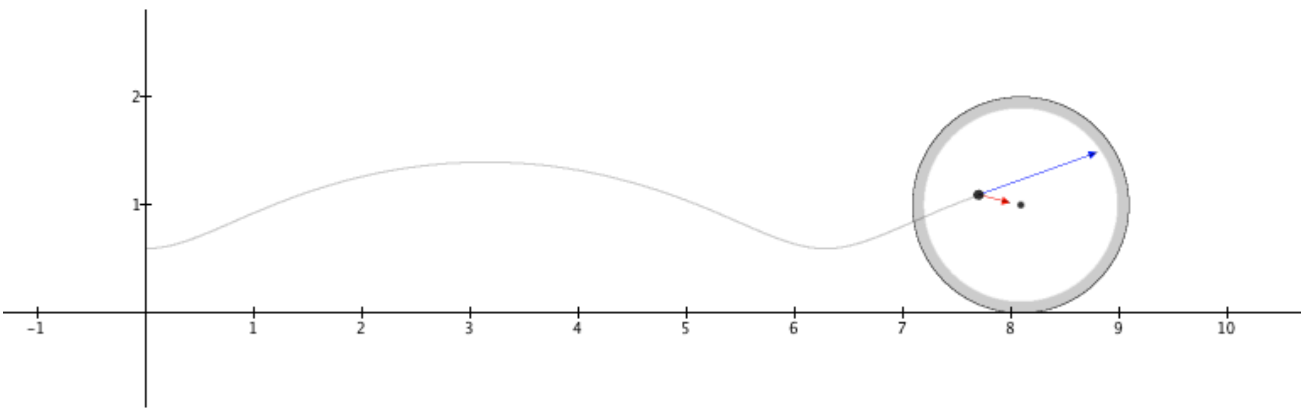

Imagem da animação (anexo) da trajetória do pedal