Seja A uma matriz quadrada de ordem **n**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

A **matriz adjunta** de A é a **transposta** da matriz dos **complementos algébricos** de A, isto é:

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = [A_{ij}]^T$$

Sendo A_{ij} o complemento algébrico de a_{ij} obtido através da expressão:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

M_{ij} denomina-se o **menor complementar** de a_{ij} e é igual ao **determinante** da matriz que se obtém eliminando a linha e a coluna desse elemento, isto é, **eliminando a linha *i* e a coluna *j*.**

A **matriz inversa** da matriz A pode ser calculada pela expressão:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$$

Exemplo:

Calcular a matriz inversa pelo método da adjunta.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Começa-se por calcular a adjunta e, para facilitar, constrói-se a tabela de sinais, $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

Assim,

$$a_{11} = -1 \Longrightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \Longrightarrow A_{11} = +9 = 9$$

$$a_{12} = \ \ 2 \Longrightarrow M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow A_{12} = -0 = 0$$

$$a_{13} = \ \ 1 \Longrightarrow M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \Longrightarrow A_{13} = +(-3) = -3$$

$$a_{21} = 0 \Longrightarrow M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \Longrightarrow A_{21} = -4$$

$$a_{22} = 3 \Longrightarrow M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \Longrightarrow A_{22} = +(-4) = -4$$

$$a_{23} = 0 \Longrightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \Longrightarrow A_{23} = -(-4) = 4$$

$$a_{31} = 1 \Longrightarrow M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \Longrightarrow A_{31} = +(-3) = -3$$

$$a_{32} = 2 \Longrightarrow M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow A_{32} = -0 = 0$$

$$a_{33} = 3 \Longrightarrow M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \Longrightarrow A_{33} = +(-3) = -3$$

donde, a matriz adjunta é:

$$\mathrm{Adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 \\ -4 & -4 & 4 \\ -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

O determinante de $\boldsymbol{A}$ é:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-9 + 0 + 0) - (3 + 0 + 0) = -12$$

Finalmente, a matriz inversa de $\boldsymbol{A}$ é:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\,\mathrm{Adj}(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{-12}\begin{bmatrix} 9 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$