INTRODUÇÃO

Existem dois tipos de fenómenos:

- **Determinísticos ou causais**; as mesmas causas produzem os mesmos efeitos. Sabendo-se as causas é possível prever exatamente os resultados.

- **Aleatórios ou Estocásticos**; não é possível definir exatamente uma relação entre causas e efeitos. Como consequência, não é possível prever com rigor absoluto os resultados finais.

EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA

Experiência (ou processo) que realizada nas mesmas condições pode gerar resultados diferentes.

OBSERVAÇÃO

Resultado individual de uma experiência aleatória.

ESPAÇO AMOSTRAL (OU ESPAÇO DOS RESULTADOS)

Conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória.
(S de "Sample space")

EVENTO OU ACONTECIMENTO

Subconjunto do espaço amostral

EVENTO SIMPLES OU ELEMENTAR

Evento que contém um único resultado do espaço amostral.

EVENTO COMPOSTO

Evento que contém mais do que um resultado do espaço amostral.

INTERSECÇÃO (OU CONJUNÇÃO) DE DOIS EVENTOS A E B

Representa-se por $A \cap B$

Significa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS A E B

Eventos mutuamente exclusivos, disjuntos ou incompatíveis são eventos que não podem ocorrer em simultâneo.

Em linguagem de conjuntos traduz-se por $A \cap B \neq \emptyset$

REUNIÃO (OU UNIÃO) DE DOIS EVENTOS A E B

Representa-se por $A \cup B$

Significa a ocorrência dos eventos A ou B ou os dois.

COMPLEMENTAR DE UM EVENTO A

Representa-se por $\overline{A}$ e significa a não ocorrência do evento A.

DIFERENÇA ENTRE OS EVENTOS A E B

Representa-se por $A - B$ ou $A \backslash B$ e lê-se A menos B ou A excepto B.
Significa a ocorrência do evento A mas não B.

CARDINAL DE UM CONJUNTO FINITO A

Representa-se por $\#A$ e é o número de elementos de A.

CONCEITO DE PROBABILIDADE

Uma vez que não é possível determinar exatamente o resultado de uma experiência aleatória podemos, no máximo, quantificar a esperança da ocorrência de um dos seus resultados, atribuindo um valor entre 0 e 1 a essa possibilidade. Nessa escala, o valor 0 corresponde a um resultado impossível de ocorrer, enquanto o valor 1 significa que temos a certeza que o evento ocorre. Qualquer valor intermédio é assim uma medida do nosso grau de ignorância em relação à ocorrência de um evento, numa experiência aleatória. Quanto mais próximo da unidade mais a esperança temos de que poderá ocorrer.

DEFINIÇÃO CLÁSSICA (LEI DE LAPLACE)

Se um dado evento A pode ocorrer de n maneiras diferentes num total de N resultados possíveis, igualmente prováveis, então a probabilidade do evento A é:

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{\#A}{\#S}$$

DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA (KOLMOGOROV)

Seja S um espaço amostral e sejam A e B quaisquer eventos de S. A probabilidade de um qualquer evento de S é um número real que satisfaz os seguintes axiomas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(S) = 1$
- se A e B são mutuamente exclusivos então
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

TEOREMAS

Seja S um espaço amostral e sejam A e B quaisquer eventos de S, então:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (caso particular, $P(\emptyset) = 0$)
- $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Sejam A e B dois eventos. Na hipótese de B ocorrer, qual a probabilidade de ocorrência de A? Ou, de outro modo, qual a probabilidade de A ocorrer sabendo que B ocorreu? Tendo ocorrido B é imediato que o espaço amostral passa a ser B, isto é, o espaço amostral reduz-se ao conjunto B. Isto conduz à seguinte definição:

DEFINIÇÃO

A probabilidade condicional de A dado B denota-se por $P(A|B)$ e é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

se $P(B) \neq 0$

Como exemplos limite de probabilidade condicional considere-se:

- A e B eventos mutuamente exclusivos. Como se viu, nesse caso $A \cap B \neq \emptyset$ e, portanto, A e B não podem ocorrer em simultâneo. Sendo assim, a ocorrência de B impede a ocorrência de A e vice-versa, isto é, se A ocorre B não ocorre e vice-versa, donde, $P(A|B) = 0$ e $P(A|B) = 0$.
- $B \subseteq A$. Neste caso, a ocorrência de B implica a ocorrência de A, uma vez que qualquer resultado de B é também resultado de A, logo, se B ocorre então A ocorre necessariamente: $P(A|B) = 1$

Logo, nos dois casos anteriores, os eventos A e B não são independentes.

Considere agora que a ocorrência do evento B não afecta a ocorrência do evento A. Nesse caso, é evidente que $P(A|B) = P(A)$. De igual modo, a ocorrência de A também não pode interferir na ocorrência do evento B, donde $P(B|A) = P(B)$. Diz-se então que os eventos A e B são independentes:

EVENTOS INDEPENDENTES

A e B são eventos independentes se e só se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ou

$P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$ com $P(A)$ e $P(B)$ não nulos

No caso em que os eventos não são independentes podemos encontrar uma regra muito útil para a probabilidade simultânea de eventos, consequência simples da probabilidade condicional:

PROBABILIDADE CONJUNTA DE EVENTOS

Sejam os eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$. A probabilidade da sua conjunção é:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P[A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})]$$

Considere agora os eventos $B_1, B_2, \dots, B_n$ do espaço amostral S, de tal forma que $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo o $i \neq j$. Isto é, os eventos são mutuamente exclusivos, dois a dois, e reunidos formam todo o espaço amostral. Nestas condições os eventos $B_1, B_2, \dots, B_n$ constituem o que se designa por partição do espaço amostral:

PARTIÇÃO DO ESPAÇO AMOSTRAL

Os eventos $B_1, B_2, \dots, B_n$ constituem uma partição do espaço amostral S se e só se:

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S \ \wedge \ B_i \cap B_j = \emptyset \ \textit{para todo o } i \neq j$$

Demonstram-se os seguintes teoremas:

TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

Se os eventos $B_1, B_2, \dots, B_n$ constituem uma partição do espaço amostral, então, para qualquer evento A, tem-se:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \cdots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

Este teorema é útil quando o evento A se realizar, necessária e exclusivamente, em simultâneo com um evento B_1 e/ou B_2 e/ou … e/ou B_n, o que é o caso sempre que os eventos $B_1, B_2, \dots, B_n$ constituam uma partição de S:

$$A = A \cap S = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n).$$

TEOREMA DE BAYES

Se os eventos $B_1, B_2, \dots, B_n$ constituem uma partição do espaço amostral, então, para qualquer evento A, tem-se:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)}$$

Tendo em conta que a ocorrência do evento A pode ser consequência da ocorrência de algum dos eventos B_i, o teorema de Bayes inverte esse condicionamento permitindo calcular a probabilidade da ocorrência de uma causa, B_i, sabendo-se o efeito, A. Daí ser frequente designar este teorema por teorema da probabilidade das causas.

MÉTODOS DE CONTAGEM (COMBINATÓRIA)

PRINCÍPIO GERAL DA MULTIPLICAÇÃO. **"A e B"**, EVENTOS INDEPENDENTES.

Se um processo pode ocorrer de n_1 maneiras diferentes e se, independentemente deste, um segundo evento pode ocorrer de n_2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente até ao evento de ordem k, então os k eventos podem ocorrer de $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ maneiras diferentes.

PRINCÍPIO GERAL DA ADIÇÃO. **"A ou B"**, EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS.

Se um processo pode ocorrer de k alternativas que se excluem duas a duas, havendo n_1 maneiras de realizar a primeira alternativa, n_2 maneiras de realizar a segunda alternativa, e assim sucessivamente até à k-ésima alternativa, então o processo pode ocorrer de $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ maneiras diferentes.

PERMUTAÇÕES DE n ELEMENTOS.

Sejam n objetos diferentes. O número de sequências, arranjos ou permutações, com uma ordem definida, dos n objetos é

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$$

PERMUTAÇÕES OU ARRANJOS DE n ELEMENTOS p A p.

Sejam n objetos diferentes. O número de sequências, arranjos ou permutações, com uma ordem definida, de n objetos escolhendo p objetos ($p \leq n$) de cada vez é

$${}^{n}A_{p} = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Existem dois tipos de problemas que, por serem relativamente comuns, merecem uma atenção especial:

PERMUTAÇÕES QUE INCLUEM ELEMENTOS IGUAIS E INDISTINGUÍVEIS.

O número de permutações diferentes de n objetos, dos quais n_1 são de um determinado tipo (indistinguíveis), n_2 de um segundo tipo, … , e n_k de um k-ésimo tipo, com $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, é

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

DIVISÃO DE UM CONJUNTO DE OBJETOS EM VÁRIOS GRUPOS.

O número de maneiras diferentes de dividir n objetos em k grupos, com n_1 no primeiro grupo, n_2 no segundo grupo, … , e n_k no k-ésimo grupo, com $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, é

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Como caso particular do resultado anterior, queremos saber quantos grupos diferentes de p elementos é possível fazer, escolhidos de um total de n elementos, sem considerar a ordem de escolha:

COMBINAÇÕES DE n ELEMENTOS p A p.

O número de combinações (ou grupos) de p objetos escolhidos de um total de n objetos, sem considerar a ordem de escolha, é

$$^{n}C_{p} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{^{n}A_{p}}{p!}$$

As situações a seguir indicadas consideram a possibilidade de haver **repetição** de elementos nas sequências ou grupos considerados, algo que não foi tido em conta anteriormente:

PERMUTAÇÕES OU ARRANJOS DE n ELEMENTOS p A p, COM REPETIÇÃO.

Sejam n objetos diferentes. O número de sequências, arranjos ou permutações, com uma ordem definida, de n objetos escolhendo p objetos ($p \leq n$) com eventual repetição, é

$$^{n}A'_{p} = n^{p}$$

COMBINAÇÕES DE n ELEMENTOS p A p, COM REPETIÇÃO.

O número de combinações (ou grupos) de p objetos, com eventual repetição, escolhidos de um total de n objetos, sem considerar a ordem de escolha, é

$$^{n}C'_{p} = {}^{n+p-1}C_{p}$$

RESUMO

	SEM REPETIÇÃO	COM REPETIÇÃO
INTERESSA A ORDEM	$^{n}A_{p} = \frac{n!}{(n-p)!}$	$^{n}A'_{p} = n^{p}$
NÃO INTERESSA A ORDEM	$^{n}C_{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	$^{n}C'_{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

paulo ribeiro