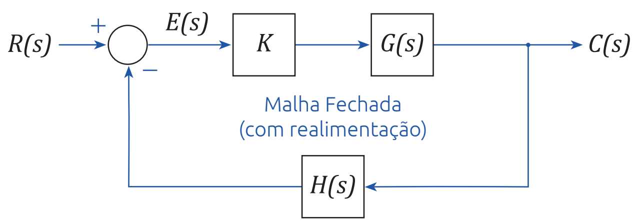
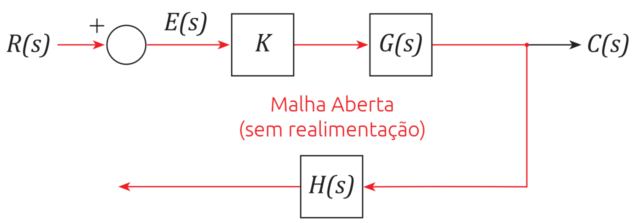
Root-locus (RL) ou Lugar Geométrico das Raízes. Definição

Desenho, no plano complexo, dos polos do sistema de malha fechada em função de um parâmetro, normalmente o ganho K, considerado positivo. Mais propriamente, é o lugar geométrico das raízes da equação característica, isto é, os polos da função de transferência de malha fechada (FTMF) para os diferentes valores de K. Em particular, o root-locus permite analisar visualmente a estabilidade com o ganho aplicado.

Forma canónica de um sistema de controlo em malha fechada com realimentação negativa (feedback negativo) e ganho de controlador positivo





$R(s)$ – sinal de entrada, input, estímulo, variável de referência.
$C(s)$ – sinal de saída, output, resposta, variável controlada.
$E(s)$ – sinal de erro ou sinal atuante.
$H(s)$ – função de transferência de feedback ou realimentação.
$K\,G(s)$ – função de transferência direta.
$K\,G(s)H(s)$ – função de transferência de malha aberta (**FTMA**).
$C(s)/R(s)$ – função de transferência de malha fechada (**FTMF**).

$$\text{FTMF} = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)H(s)}$$

Função de Transferência de Malha Fechada

$$\text{FTMA} = K\,G(s)H(s)$$

Função de Transferência de Malha Aberta

sendo $G(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, com $N(s)$ e $D(s)$ polinómios numerador e denominador em s, vem:

$$\text{FTMA} = K\,G(s)H(s) = K\,\frac{N(s)}{D(s)}, \qquad \text{FTMF} = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,\frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{K\,G(s)D(s)}{D(s) + KN(s)}$$

os polos da FTMA obtêm-se resolvendo a **equação característica**;

$$D(s) + K\,N(s) = 0$$

donde se conclui:

- a localização dos polos depende do ganho, isto é, do valor atribuído a K
- se $K \to 0$ então $D(s) = -\,K\,N(s) \to 0$, logo, **quando o ganho é nulo, os polos da FTMF coincidem com os polos da FTMA**.
- se $K \to +\infty$ então $\frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{1}{K} \to 0 \Longrightarrow N(s) \to 0 \ \vee D(s) \to \infty$ $(\Longrightarrow |s| \to \infty)$, isto é, **quando o ganho tende para infinito, os polos da FTMF tendem para os zeros da FTMA, ou, para o infinito**.

resumindo, **o root-locus, traçado dos polos da FTMF no plano complexo, inicia nos polos da FTMA e termina nos zeros da FTMA ou no infinito**.

Regras gerais para o traçado do ROOT-LOCUS (RL)

1. Determina-se a **FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE MALHA ABERTA (FTMA)** do sistema.

$$\text{FTMA} = K\,G(s)H(s) = K\,\frac{N(s)}{D(s)}$$

2. **PONTOS DE PARTIDA DO ROOT-LOCUS.**
Calculam-se os POLOS da FTMA.
Representam-se no plano complexo pelo símbolo **×**.
Cada polo da FTMA dá origem a um ramo do RL.
Seja n o número de polos da FTMA (= n.º de ramos).

n polos, reais ou complexos

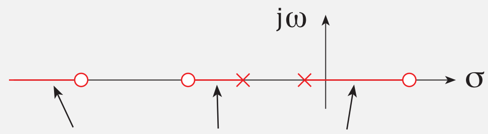
$$D(s) = 0 \Longrightarrow s = \begin{cases} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{cases}$$

3. **PONTOS DE CHEGADA DO ROOT-LOCUS.**
Calculam-se os ZEROS da FTMA.
Representam-se no plano complexo pelo símbolo **O**.
Seja m o número de zeros da FTMA. Normalmente, existem mais polos do que zeros, $n > m$, pelo que $n - m$ ramos terminam no infinito, ∞.

m zeros, reais ou complexos

$$N(s) = 0 \Longrightarrow s = \begin{cases} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_m \end{cases}$$

4. **PONTOS DO ROOT-LOCUS SOBRE O EIXO REAL**
Um ponto do eixo real faz parte do RL se houver um número ímpar de polos e zeros reais da FTMA à sua direita.



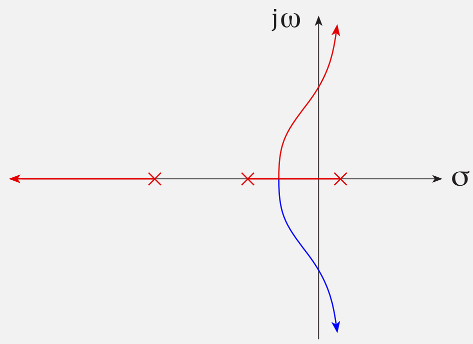
à sua direita tem um n.º ímpar de polos e zeros

5. **PONTOS DE SAÍDA/ENTRADA NO EIXO REAL**
Os pontos onde os ramos do RL deixam ou entram no eixo real são os pontos onde K, visto como função da variável real s (resolvendo a equação característica em ordem ao ganho), atinge um **máximo local (ponto de saída)** ou **mínimo local (ponto de entrada)**.

$$1 + K\,G(s)H(s) = 0 \Longrightarrow K = -\frac{1}{G(s)H(s)} \Longrightarrow \frac{dK}{ds} = \cdots$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \Longrightarrow s = \cdots$$

6. **O ROOT-LOCUS É SIMÉTRICO EM RELAÇÃO EIXO REAL**
Basta, por isso, analisar apenas o que se passa acima (ou abaixo) do eixo real, sendo o resto uma imagem espelhada em relação a esse eixo.

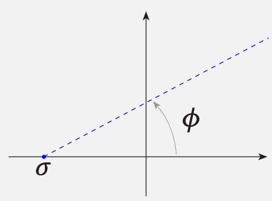


7. **ASSÍNTOTAS DO ROOT-LOCUS**
Se $n > m$ então existem $n - m$ ramos que terminam no infinito. Estes ramos tendem para o infinito segundo assíntotas cujo centro, $\boldsymbol{\sigma}$, **(ponto de interseção com o eixo real)** e ângulos, $\boldsymbol{\phi_k}$ **(em relação ao semieixo real positivo)**, vêm dados pelas equações apresentadas.

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}$$

$$\phi_k = \frac{(2k+1)180°}{n - m},$$

$$k \in \{0, 1, \dots, n - m - 1\}$$



8. **ÂNGULOS DE PARTIDA DE POLOS COMPLEXOS / CHEGADA A ZEROS COMPLEXOS**
Se a FTMA tem polos/zeros complexos é importante calcular o ângulo de partida/chegada desses pontos no root-locus usando, para o efeito, a condição de argumento.
$\boldsymbol{\theta_p}$**, ângulo de partida do polo complexo $\boldsymbol{p}$**
$\boldsymbol{\theta_z}$**, ângulo de chegada ao zero complexo $\boldsymbol{z}$**

$$\theta_p = 180° + \sum_{z_i\,\in\,zeros} \angle(p - z_i) - \sum_{\substack{p_i\,\in\,polos \\ p_i\,\neq\,p}} \angle(p - p_i)$$

$$\theta_z = 180° + \sum_{p_i\,\in\,polos} \angle(z - p_i) - \sum_{\substack{z_i\,\in\,zeros \\ z_i\,\neq\,z}} \angle(z - z_i)$$

9. **PONTOS DE CRUZAMENTO NO EIXO IMAGINÁRIO**
A determinação dos pontos de cruzamento do RL no eixo imaginário, e o respectivo ganho, é fundamental para avaliação da estabilidade do sistema de malha fechada. Pode ser feito por recurso ao **critério de Routh-Hurwitz** ou substituindo $s = j\omega$ na equação característica e resolvendo-a.

Critério de Routh-Hurwitz

ou

$$1 + K\,G(j\omega)H(j\omega) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} K = \cdots \\ \omega = \cdots \end{cases}$$