

• <b>Introdução</b>	
- Experiência Aleatória	2
- Observação	2
- Espaço Amostral	2
- Evento ou Acontecimento	2
- Evento Simples ou Elementar	2
- Evento Composto	2
- Intersecção ou Conjunção de Eventos	2
- Eventos mutuamente Exclusivos	2
- Reunião de Eventos	3
- Complementar de um Evento	3
- Diferença de Eventos	3
- Cardinal de um Conjunto Finito	3
• <b>Conceito de Probabilidade</b>	
- Definição Clássica	3
- Definição Axiomática	3
- Teoremas	4
• <b>Probabilidade Condicional</b>	
- Definição	4
- Eventos Independentes	4
- Probabilidade Conjunta de Eventos	5
- Teorema da Probabilidade Total	5
- Teorema de Bayes	5
• <b>Métodos de Contagem</b>	
- Princípio Fundamental da Contagem	6
- Permutações de $n$ elementos	6
- Permutações ou Arranjos de $n$ elementos $p$ a $p$	6
- Permutações que incluem elementos iguais e indistinguíveis	6
- Divisão de um Conjunto de Objetos em vários Grupos	6
- Combinações de $n$ elementos $p$ a $p$	7
- Permutação ou Arranjos de $n$ elementos $p$ a $p$ , com repetição	7
- Combinações de $n$ elementos $p$ a $p$ , com repetição	7
- Resumo	7
• <b>Triângulo de Pascal e Binómio de Newton</b>	
- Triângulo de Pascal	8
- Propriedades	8
- Binómio de Newton	8
- Termo de ordem $k$ do Binómio de Newton	8

## INTRODUÇÃO

Existem dois tipos de fenômenos:

- **Determinísticos ou causais;** as mesmas causas produzem os mesmos efeitos. Sabendo-se as causas é possível prever exatamente os resultados.
- **Aleatórios ou Estocásticos;** não é possível definir exatamente uma relação entre causas e efeitos. Como consequência, não é possível prever com rigor absoluto os resultados finais.

## EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA

Experiência (ou processo) que realizada nas mesmas condições pode gerar resultados diferentes.

## OBSERVAÇÃO

Resultado individual de uma experiência aleatória.

## ESPAÇO AMOSTRAL (OU ESPAÇO DOS RESULTADOS)

Conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória.  
( $S$  de "Sample space")

## EVENTO OU ACONTECIMENTO

Subconjunto do espaço amostral

## EVENTO SIMPLES OU ELEMENTAR

Evento que contém um único resultado do espaço amostral.

## EVENTO COMPOSTO

Evento que contém mais do que um resultado do espaço amostral.

## INTERSECÇÃO (OU CONJUNÇÃO) DE DOIS EVENTOS $A$ E $B$

Representa-se por  $A \cap B$   
Significa a ocorrência simultânea dos eventos  $A$  e  $B$ .

## EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS $A$ E $B$

Eventos mutuamente exclusivos, disjuntos ou incompatíveis são eventos que não podem ocorrer em simultâneo.  
Em linguagem de conjuntos traduz-se por  $A \cap B = \emptyset$

## REUNIÃO (OU UNIÃO) DE DOIS EVENTOS $A$ E $B$

Representa-se por  $A \cup B$   
Significa a ocorrência dos eventos  $A$  ou  $B$  ou os dois.

## COMPLEMENTAR DE UM EVENTO $A$

Representa-se por  $\bar{A}$  e significa a não ocorrência do evento  $A$ .

## DIFERENÇA ENTRE OS EVENTOS $A$ E $B$

Representa-se por  $A - B$  ou  $A \setminus B$  e lê-se  $A$  menos  $B$  ou  $A$  excepto  $B$ .  
Significa a ocorrência do evento  $A$  mas não  $B$ .

## CARDINAL DE UM CONJUNTO FINITO $A$

Representa-se por  $\#A$  e é o número de elementos de  $A$ .

## CONCEITO DE PROBABILIDADE

Uma vez que não é possível determinar exatamente o resultado de uma experiência aleatória podemos, no máximo, quantificar a esperança da ocorrência de um dos seus resultados, atribuindo um valor entre 0 e 1 a essa possibilidade. Nessa escala, o valor 0 corresponde a um resultado impossível de ocorrer, enquanto o valor 1 significa que temos a certeza que o evento ocorre. Qualquer valor intermédio é assim uma medida do nosso grau de ignorância em relação à ocorrência de um evento, numa experiência aleatória. Quanto mais próximo da unidade mais a esperança temos de que poderá ocorrer.

## DEFINIÇÃO CLÁSSICA (LEI DE LAPLACE)

Se um dado evento  $A$  pode ocorrer de  $n$  maneiras diferentes num total de  $N$  resultados possíveis, igualmente prováveis, então a probabilidade do evento  $A$  é:

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{\#A}{\#S}$$

## DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA (KOLMOGOROV)

Seja  $S$  um espaço amostral e sejam  $A$  e  $B$  quaisquer eventos de  $S$ . A probabilidade de um qualquer evento de  $S$  é um número real que satisfaz os seguintes axiomas:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(S) = 1$
- se  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

## TEOREMAS

Seja  $S$  um espaço amostral e sejam  $A$  e  $B$  quaisquer eventos de  $S$ , então:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$  (nota,  $A - B = A \setminus B = A \cap \bar{B}$ )
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  (caso particular,  $P(\emptyset) = 0$ )
- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

## PROBABILIDADE CONDICIONAL

Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos. Na hipótese de  $B$  ocorrer, qual a probabilidade de ocorrência de  $A$ ? Ou, de outro modo, qual a probabilidade de  $A$  ocorrer sabendo que  $B$  ocorreu? Tendo ocorrido  $B$  é imediato que o espaço amostral passa a ser  $B$ , isto é, o espaço amostral reduz-se ao conjunto  $B$ . Isto conduz à seguinte definição:

### DEFINIÇÃO

A probabilidade condicional de  $A$  dado  $B$  denota-se por  $P(A|B)$  e é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

se  $P(B) \neq 0$

Como exemplos limite de probabilidade condicional considere-se:

- $A$  e  $B$  eventos mutuamente exclusivos. Como se viu, nesse caso  $A \cap B = \emptyset$  e, portanto,  $A$  e  $B$  não podem ocorrer em simultâneo. Sendo assim, a ocorrência de  $B$  impede a ocorrência de  $A$  e vice-versa, isto é, se  $A$  ocorre  $B$  não ocorre e vice-versa, donde,  $P(A|B) = 0$  e  $P(A|B) = 0$ .
- $B \subseteq A$ . Neste caso, a ocorrência de  $B$  implica a ocorrência de  $A$ , uma vez que qualquer resultado de  $B$  é também resultado de  $A$ , logo, se  $B$  ocorre então  $A$  ocorre necessariamente:  $P(A|B) = 1$

Logo, nos dois casos anteriores, os eventos  $A$  e  $B$  não são independentes.

Considere agora que a ocorrência do evento  $B$  não afecta a ocorrência do evento  $A$ . Nesse caso, é evidente que  $P(A|B) = P(A)$ . De igual modo, a ocorrência de  $A$  também não pode interferir na ocorrência do evento  $B$ , donde  $P(B|A) = P(B)$ . Diz-se então que os eventos  $A$  e  $B$  são independentes:

### EVENTOS INDEPENDENTES

$A$  e  $B$  são eventos independentes se e só se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ou

$$P(A|B) = P(A) \text{ e } P(B|A) = P(B) \text{ com } P(A) \text{ e } P(B) \text{ não nulos}$$

No caso em que os eventos não são independentes podemos encontrar uma regra muito útil para a probabilidade simultânea de eventos, consequência simples da probabilidade condicional:

### PROBABILIDADE CONJUNTA DE EVENTOS

Sejam os eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . A probabilidade da sua conjunção é:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P[A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})]$$

Considere agora os eventos  $B_1, B_2, \dots, B_n$  do espaço amostral  $S$ , de tal forma que  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$  e  $B_i \cap B_j = \emptyset$  para todo o  $i \neq j$ . Isto é, os eventos são mutuamente exclusivos, dois a dois, e reunidos formam

todo o espaço amostral. Nestas condições os eventos  $B_1, B_2, \dots, B_n$  constituem o que se designa por partição do espaço amostral:

#### PARTIÇÃO DO ESPAÇO AMOSTRAL

Os eventos  $B_1, B_2, \dots, B_n$  constituem uma partição do espaço amostral  $S$  se e só se:

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S \quad \wedge \quad B_i \cap B_j = \emptyset \text{ para todo } i \neq j$$

Demonstram-se os seguintes teoremas:

#### TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

Se os eventos  $B_1, B_2, \dots, B_n$  constituem uma partição do espaço amostral, então, para qualquer evento  $A$ , tem-se:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

Este teorema é útil quando o evento  $A$  se realizar, necessária e exclusivamente, em simultâneo com um evento  $B_1$  e/ou  $B_2$  e/ou ... e/ou  $B_n$ , o que é o caso sempre que os eventos  $B_1, B_2, \dots, B_n$  constituam uma partição de  $S$ :

$$A = A \cap S = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n).$$

#### TEOREMA DE BAYES

Se os eventos  $B_1, B_2, \dots, B_n$  constituem uma partição do espaço amostral, então, para qualquer evento  $A$ , tem-se:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)}$$

Tendo em conta que a ocorrência do evento  $A$  pode ser consequência da ocorrência de algum dos eventos  $B_i$ , o teorema de Bayes inverte esse condicionamento permitindo calcular a probabilidade da ocorrência de uma causa,  $B_i$ , sabendo-se o efeito,  $A$ . Daí ser frequente designar este teorema por **teorema da probabilidade das causas**.

## MÉTODOS DE CONTAGEM (COMBINATÓRIA)

### PRINCÍPIO GERAL DA MULTIPLICAÇÃO. "A e B", EVENTOS INDEPENDENTES.

Se um processo pode ocorrer de  $n_1$  maneiras diferentes e se, independentemente deste, um segundo evento pode ocorrer de  $n_2$  maneiras diferentes, e assim sucessivamente até ao evento de ordem  $k$ , então os  $k$  eventos podem ocorrer de  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  maneiras diferentes.

### PRINCÍPIO GERAL DA ADIÇÃO. "A ou B", EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS.

Se um processo pode ocorrer de  $k$  alternativas que se excluem duas a duas, havendo  $n_1$  maneiras de realizar a primeira alternativa,  $n_2$  maneiras de realizar a segunda alternativa, e assim sucessivamente até à  $k$ -ésima alternativa, então o processo pode ocorrer de  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  maneiras diferentes.

### PERMUTAÇÕES DE $n$ ELEMENTOS.

Sejam  $n$  objetos diferentes. O número de sequências, arranjos ou permutações, com uma ordem definida, dos  $n$  objetos é

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$$

### PERMUTAÇÕES OU ARRANJOS DE $n$ ELEMENTOS $p$ A $p$ .

Sejam  $n$  objetos diferentes. O número de sequências, arranjos ou permutações, com uma ordem definida, de  $n$  objetos escolhendo  $p$  objetos ( $p \leq n$ ) de cada vez é

$${}^n A_p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$$

Existem dois tipos de problemas que, por serem relativamente comuns, merecem uma atenção especial:

### PERMUTAÇÕES QUE INCLUEM ELEMENTOS IGUAIS E INDISTINGUÍVEIS.

O número de permutações diferentes de  $n$  objetos, dos quais  $n_1$  são de um determinado tipo (indistinguíveis),  $n_2$  de um segundo tipo, ..., e  $n_k$  de um  $k$ -ésimo tipo,

com  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ , é

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

### DIVISÃO DE UM CONJUNTO DE OBJETOS EM VÁRIOS GRUPOS.

O número de maneiras diferentes de dividir  $n$  objetos em  $k$  grupos, com  $n_1$  no primeiro grupo,  $n_2$  no segundo grupo, ..., e  $n_k$  no  $k$ -ésimo grupo, com  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ , é

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Como caso particular do resultado anterior, queremos saber quantos grupos diferentes de  $p$  elementos é possível fazer, escolhidos de um total de  $n$  elementos, sem considerar a ordem de escolha:

### COMBINAÇÕES DE $n$ ELEMENTOS $p$ A $p$ .

O número de combinações (ou grupos) de  $p$  objetos escolhidos de um total de  $n$  objetos, sem considerar a ordem de escolha, é

$${}^n C_p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{{}^n A_p}{p!}$$

As situações a seguir indicadas consideram a possibilidade de haver **repetição** de elementos nas seqüências ou grupos considerados, algo que não foi tido em conta anteriormente:

### PERMUTAÇÕES OU ARRANJOS DE $n$ ELEMENTOS $p$ A $p$ , COM REPETIÇÃO.

Sejam  $n$  objetos diferentes. O número de seqüências, arranjos ou permutações, com uma ordem definida, de  $n$  objetos escolhendo  $p$  objetos ( $p \leq n$ ) com eventual repetição, é

$${}^n A'_p = n^p$$

### COMBINAÇÕES DE $n$ ELEMENTOS $p$ A $p$ , COM REPETIÇÃO.

O número de combinações (ou grupos) de  $p$  objetos, com eventual repetição, escolhidos de um total de  $n$  objetos, sem considerar a ordem de escolha, é

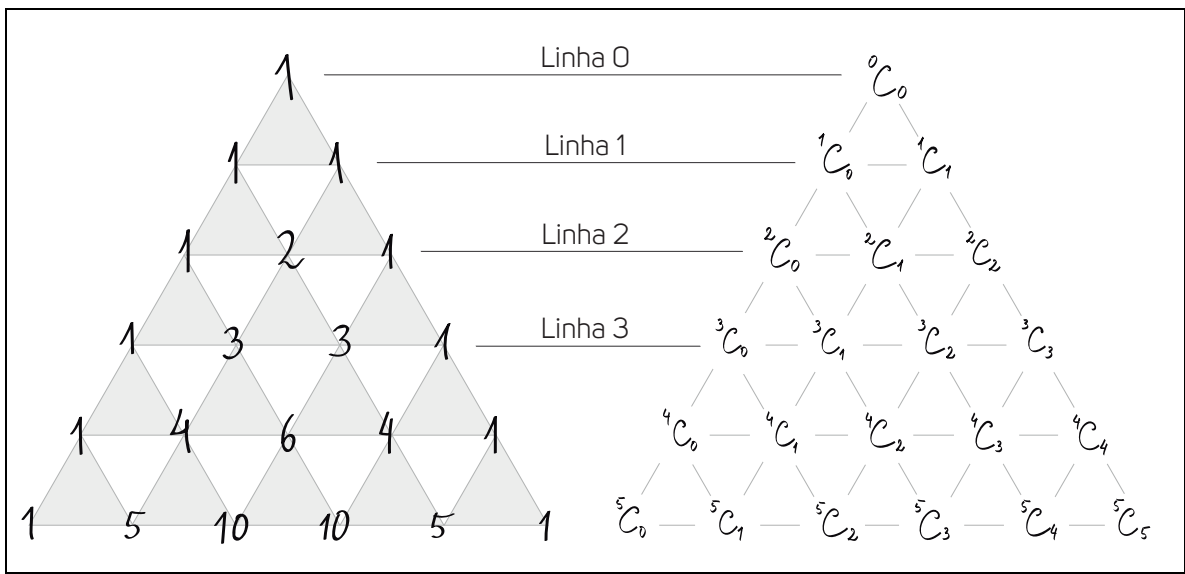
$${}^n C'_p = {}^{n+p-1} C_p$$

### RESUMO

	SEM REPETIÇÃO	COM REPETIÇÃO
INTERESSA A ORDEM	${}^n A_p = \frac{n!}{(n-p)!}$	${}^n A'_p = n^p$
NÃO INTERESSA A ORDEM	${}^n C_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	${}^n C'_p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

# TRIÂNGULO DE PASCAL E BINÓMIO DE NEWTON

## TRIÂNGULO DE PASCAL



## PROPRIEDADES

- ${}^n C_p = {}^n C_{n-p}$
- ${}^n C_p + {}^n C_{p+1} = {}^{n+1} C_{p+1}$
- ${}^n C_0 + {}^n C_1 + \dots + {}^n C_n = 2^n$
- ${}^n C_0 = {}^n C_n = 1$
- ${}^n C_1 = n$

## BINÓMIO DE NEWTON

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n {}^n C_k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

## TERMO DE ORDEM $k$ DO BINÓMIO DE NEWTON

$$T_p = {}^n C_{p-1} \cdot a^{n-p+1} \cdot b^{p-1}$$

*paulo ribeiro*