FLUXOS

$$\phi_{B,S} \equiv \int_S b\rho(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,dA = \int_S b\rho\|\mathbf{V}\|\cos\theta\,dA, \qquad b = \frac{dB}{dm}$$

B	**Propriedade escalar ou vetorial extensiva,** transportada pelo escoamento.
b	Respectiva **propriedade intensiva**.
ρ	Massa volúmica do fluido.
S	Superfície atravessada pelo escoamento.
dA	Elemento inifinitesimal de área sobre a superfície S.
$\hat{\mathbf{n}}$	**Versor normal** (perpendicular) ao elemento de área.*
$\mathbf{V}$	**Vetor velocidade** do escoamento no elemento de área.
$\phi_{B,S}$	**Fluxo, Caudal ou Vazão da propriedade B através da superfície S.** **Quantidade de B transportada por unidade de tempo através da superfície S.**

CAUDAL VOLÚMICO OU VAZÃO EM VOLUME (FLUXO DE VOLUME)

$$Q \equiv \int_S (\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,dA = \int_S \|\mathbf{V}\|\cos\theta\,dA$$

VELOCIDADE MÉDIA NUMA CONDUTA (APROXIMAÇÃO UNIDIMENSIONAL)

Corresponde à velocidade de um escoamento unidimensional, uniforme em toda a secção transversal, que tem a mesma vazão em volume que o escoamento real.

$V \equiv \dfrac{\int_S (\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,dA}{A} = \dfrac{Q}{A}$	$Q = A\cdot V$	$\mathrm{m^3/s}$

CAUDAL MÁSSICO OU VAZÃO EM MASSA (FLUXO DE MASSA)

	APROXIMAÇÃO UNIDIMENSIONAL	
$\dot{m} \equiv \int_S \rho(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,dA$	$\dot{m} = \rho Q = \rho A V$	kg/s

CAUDAL EM PESO OU VAZÃO EM PESO (FLUXO DE PESO)

$Q_W = \dot{m}\mathrm{g}$	N/s

* Por convenção, se a superfície S for fechada o versor aponta para fora da mesma.

FLUXO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO (MOMENTO LINEAR)

APROXIMAÇÃO UNIDIMENSIONAL	ESCOAMENTO NÃO UNIFORME (FATOR DE CORREÇÃO β)		
$\mathbf{Q}_p = \rho Q \mathbf{V} = \dot{m}\mathbf{V}$	$\mathbf{Q_p} = \beta \dot{m}\mathbf{V}$	$\beta = \frac{4}{3} \Longleftarrow$ Regime Laminar $\beta \approx 1 \Longleftarrow$ Regime Turbulento	N

FLUXO DE ENERGIA CINÉTICA

APROXIMAÇÃO UNIDIMENSIONAL	ESCOAMENTO NÃO UNIFORME (FATOR DE CORREÇÃO α)		
$Q_K = \frac{1}{2}\rho V^2 Q = \frac{1}{2}\dot{m}V^2$	$Q_K = \alpha \frac{1}{2}\dot{m}V^2$	$\alpha = 2 \Longleftarrow$ Regime Laminar $\alpha \approx 1 \Longleftarrow$ Regime Turbulento	W

SISTEMA E VOLUME DE CONTROLO

SISTEMA (SIS)†

É uma quantidade de matéria de identidade fixa cujas propriedades, posição e forma podem mudar ao longo do tempo, com exceção da massa que permanece invariável‡. Um observador associado ao sistema acompanha a trajetória individual das suas partículas, recolhendo informação das respectivas propriedades em função do tempo e obtendo, deste modo, uma descrição da sua evolução histórica (descrição de Lagrange).

Para cada partícula do SIS teremos, na descrição de **Lagrange**, $B_i = B_i(t)$, sendo B_i uma propriedade genérica do elemento de fluido i, no instante de tempo t.

VOLUME DE CONTROLO (VC)

Região conceptual imaginada no seio do escoamento e "atravessada" por este. Um observador associado ao volume de controlo observa as propriedades em função da posição no seu interior, para um dado instante de tempo, sem se preocupar com a trajetória individual das partículas de fluido (descrição de Euler), obtendo, deste modo, uma "imagem" do campo de escoamento. Daí a designação volume de controlo já que essa região está a ser "controlada" ou "monitorizada".

Para cada ponto do VC teremos, na descrição de **Euler**, $B = B(x, y, z, t)$, sendo B uma propriedade genérica dos elementos de fluido que passam no ponto de coordenadas (x, y, z), podendo essa propriedade, em geral, variar com o tempo t.

SUPERFÍCIE DE CONTROLO (SC)

Fronteira ou contorno do VC. Superfície matemática fechada envolvendo o Volume de Controlo. A identificação atenta da SC é fundamental dado que é nela que se detetam os fluxos ou transferências das propriedades em análise: volume, massa, momento linear, energia...

† Equivalente ao sistema fechado ou massa de controlo em termodinâmica.

‡ Excetuam-se os casos em que a matéria sofre transformações nucleares ou relativísticas.

TEOREMA DO TRANSPORTE DE REYNOLDS

As leis fundamentais da física são usualmente expressas para sistemas materiais. Porém, em mecânica dos fluidos a análise mais comum é a do volume de controlo, onde a descrição de Euler é preferível. Torna--se, por isso, necessário estabelecer uma ponte entre a abordagem lagrangeana a sistemas e a abordagem euleriana a volumes de controlo, mais adequada à análise de escoamentos. Essa transformação entre as duas descrições denomina-se **teorema do transporte de Reynolds**.

FORMA GERAL PARA VC FIXO E INDEFORMÁVEL	ENTRADAS E SAÍDAS UNIDIMENSIONAIS
$\frac{DB_{\mathrm{SIS}}}{Dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathrm{VC}} b\rho\, d\mathcal{V} \right) + \oint_{\mathrm{SC}} b\rho(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})\, dA$	$\frac{DB_{\mathrm{SIS}}}{Dt} = \frac{dB_{\mathrm{VC}}}{dt} + \sum_{\mathrm{sai}} \dot{m}b - \sum_{\mathrm{ent}} \dot{m}b$

A TAXA DE VARIAÇÃO TEMPORAL DE UMA PROPRIEDADE EXTENSIVA DO SISTEMA QUE, NUM DADO INSTANTE, COINCIDE COM UM VOLUME DE CONTROLO, É IGUAL À TAXA DE VARIAÇÃO TEMPORAL DESSA PROPRIEDADE NO INTERIOR DO VOLUME DE CONTROLO MAIS A TAXA LÍQUIDA DE TRANSPORTE DESSA PROPRIEDADE ATRAVÉS DA SUPERFÍCIE DE CONTROLO.

No instante em que o SIS e o VC coincidem.

$$\overbrace{\underbrace{\frac{DB_{\mathrm{SIS}}}{Dt}}_{\text{Taxa de variação temporal de } B \text{ do sistema}}}^{\text{SISTEMA (Lagrange)}} = \overbrace{\underbrace{\frac{dB_{\mathrm{VC}}}{dt}}_{\text{Taxa de variação temporal de } B \text{ no volume de controlo}} + \underbrace{\sum_{\mathrm{sai}} \dot{m}b - \sum_{\mathrm{ent}} \dot{m}b}_{\text{Fluxos de entrada e saída de } B \text{ através da superfície de controlo}}}^{\text{VOLUME DE CONTROLO (Euler)}}$$

REGIME DE ESCOAMENTO PERMANENTE OU ESTACIONÁRIO

Tipo de escoamento em que as propriedades do fluido permanecem constantes ao longo do tempo em cada ponto do espaço, embora possam variar de ponto para ponto. Matematicamente equivale a dizer que as propriedades do campo de escoamento só dependem da posição e não do tempo, isto é:

$$B = B(x, y, z) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

Neste regime, se as propriedades locais não variam com o tempo então as mesmas propriedades integrais, num volume de controlo fixo e indeformável, também não podem variar ao longo do tempo:

$$\frac{dB_{\mathrm{VC}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathrm{VC}} b\rho\, d\mathcal{V} \right) = \int_{\mathrm{VC}} \frac{\partial}{\partial t}(b\rho)\, d\mathcal{V} = \int_{\mathrm{VC}} 0\, d\mathcal{V} = 0$$

donde, o teorema de Reynolds, fica:

VC FIXO E INDEFORMÁVEL • ENTRADAS E SAÍDAS UNIDIMENSIONAIS • REGIME PERMANENTE
$\frac{DB_{\mathrm{SIS}}}{Dt} = \sum_{\mathrm{sai}} \dot{m}b - \sum_{\mathrm{ent}} \dot{m}b$

BALANÇO MATERIAL (MASSA)

Tendo em conta que a massa do sistema é, por definição de sistema, constante, $\frac{Dm_{SIS}}{Dt} = 0$, obtém-se, aplicando o teorema de Reynolds, as seguintes equações:

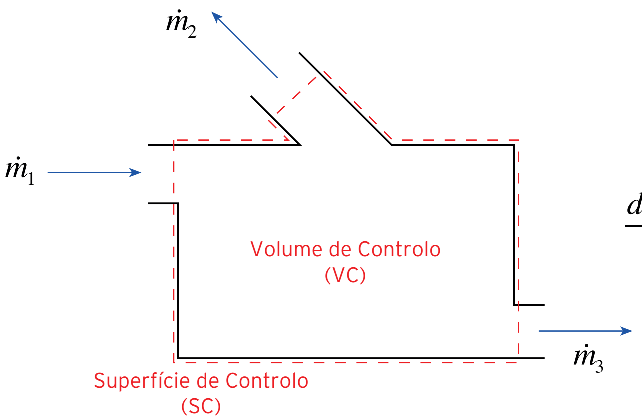
VC FIXO E INDEFORMÁVEL • ENTRADAS E SAÍDAS UNIDIMENSIONAIS

FORMA GERAL (REGIME NÃO PERMANENTE)

$$\frac{dm_{\text{VC}}}{dt} = \sum_{\text{ent}} \dot{m} - \sum_{\text{sai}} \dot{m}$$

REGIME PERMANENTE

VÁRIAS ENTRADAS E SAÍDAS	UMA ENTRADA E UMA SAÍDA (CAUDAL ÚNICO)
$\sum_{\text{sai}} \dot{m} = \sum_{\text{ent}} \dot{m}$	$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$
ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL ($\rho \approx CONSTANTE$)§	
$\sum_{\text{sai}} Q = \sum_{\text{ent}} Q$	$A_1 V_1 = A_2 V_2 \quad \Leftrightarrow \quad V_2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 V_1 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 V_1$



$$\frac{dm_{\text{VC}}}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 - \dot{m}_3$$

BALANÇO DO MOMENTO LINEAR

A taxa de variação do momento linear de um sistema, calculada em relação a um referencial inercial, é, de acordo com a 2ª lei de Newton, igual à resultante das forças externas que atuam sobre o sistema:

$$\frac{D}{Dt}(m\mathbf{V})_{\text{SIS}} = \sum_{\text{SIS}} \mathbf{F}$$

donde, pelo teorema de Reynolds, e nas condições abaixo citadas, obtém-se, **para um volume de controlo**:

VC FIXO E INDEFORMÁVEL • ENTRADAS E SAÍDAS UNIDIMENSIONAIS

REGIME PERMANENTE

VÁRIAS ENTRADAS E SAÍDAS	UMA ENTRADA E UMA SAÍDA (CAUDAL ÚNICO)
$\sum_{SIS} \boldsymbol{F} = \sum_{\text{sai}} \dot{m}\mathbf{V} - \sum_{\text{ent}} \dot{m}\mathbf{V}$	$\sum_{SIS} \boldsymbol{F} = \dot{m}(\mathbf{V_2} - \mathbf{V_1})$

EM REGIME DE ESCOAMENTO PERMANENTE, A RESULTANTE DAS FORÇAS EXTERNAS, DE CAMPO E DE SUPERFÍCIE, APLICADAS A UM SISTEMA, MOMENTANEAMENTE COINCIDENTE COM UM VOLUME DE CONTROLO, É IGUAL AO FLUXO LÍQUIDO DO MOMENTO LINEAR ATRAVÉS DA SUPERFÍCIE DE CONTROLO.

$$\sum_{\text{SIS}} \mathbf{F} = \sum_{\text{VC}} \mathbf{F}_{\text{C}} + \sum_{\text{SC}} \mathbf{F}_{\text{S}} = \underbrace{\mathbf{F}_{\text{grav.}} + \mathbf{F}_{\text{elec.}} + \mathbf{F}_{\text{magn.}}}_{\text{FORÇAS DE CAMPO}} + \underbrace{\mathbf{F}_{\text{press.}} + \mathbf{F}_{\text{visc.}} + \mathbf{R}}_{\text{FORÇAS DE SUPERFÍCIE}}$$

§ Para os propósitos da engenharia "quotidiana" todos os líquidos e os gases com $Ma \lesssim 0{,}3$ podem considerar-se incompressíveis.

FORÇAS DE CAMPO

Também chamadas forças de volume ou de corpo, são **forças externas que atuam em toda a matéria do volume de controlo** sendo, por isso, de magnitude proporcional à massa. São forças que atuam à distância, como o **peso**, a força elétrica e a força magnética. Na maior parte das aplicações em mecânica dos fluidos as forças elétrica e magnética não estão presentes ou são insignificantes.

FORÇAS DE SUPERFÍCIE

Também chamadas forças de contato, são **forças externas aplicadas** ao sistema por contato direto **na superfície de controlo** com os elementos sólidos e fluidos que lhe são adjacentes.
O estado de tensão local do escoamento nas entradas e saídas do volume de controlo dá origem a **forças de pressão** e **forças de tensão viscosa** (em geral, desprezáveis). As **forças de reação** em juntas, parafusos, suportes, paredes, cabos, são também forças de superfície, quando expostas nos locais "cortados" pela superfície de controlo.

RECOMENDAÇÕES GERAIS

- A equação do momento linear é uma equação **vetorial**, dando origem, por isso, a um máximo de três equações escalares das componentes cartesianas (ou outras). **Desenhe sempre um referencial ao lado do esquema**.

- Faça a escolha de um Volume de Controlo apropriado ao problema em consideração. **Represente a Superfície de Controlo por uma linha a tracejado**.

- **Represente todas as forças atuantes no volume de controlo** (forças de campo e forças de superfície) considerando-o como um **corpo livre** (isolado do exterior para análise).

- **Represente em cada entrada e saída os respectivos vetores velocidade** (velocidade média). **Não confunda vetores velocidade com vetores força**, são grandezas diferentes, se possível represente-os a cores diferentes!

- Ao escrever as equações tenha em atenção **os sinais das componentes no referencial que escolheu**.

- Lembre-se que, na escolha do volume de controlo, ao "cortar" um suporte sólido, um cabo ou uma parede, irá expor as forças de reação exercidas na superfície de controlo (na zona do corte) pelas partes cortadas não incluídas no volume de controlo (exteriores).

- Se desconhecer o sentido das reações **admita que todas as suas componentes são positivas** no referencial que escolheu. O cálculo final indicará os sentidos corretos.

- Se a superfície de controlo escolhida for perpendicular ao escoamento nas entradas e saídas, as forças exercidas nesses locais, pelo fluido que se encontra no exterior, serão devidas à pressão, **atuando perpendicularmente à superfície** e sempre **para o interior** do volume de controlo.

- Um fluido que escoe diretamente para a atmosfera diz-se um **jato livre** e a sua pressão é, essencialmente, a pressão atmosférica, desde que o escoamento seja subsónico.

- Se a pressão atmosférica atuar em toda a superfície de controlo, a respetiva força de pressão daí resultante é nula. Nesse caso, as forças de pressão nas entradas e saídas do escoamento deverão ser calculadas tendo por base a **pressão manométrica** e não a pressão absoluta**.

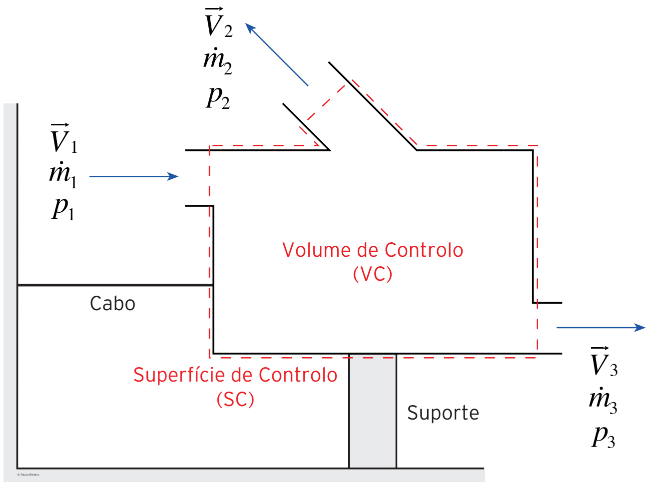
$$F_{\text{press.}} = p_{\text{man}} A = (p_{\text{abs}} - p_{\text{atm}}) A$$

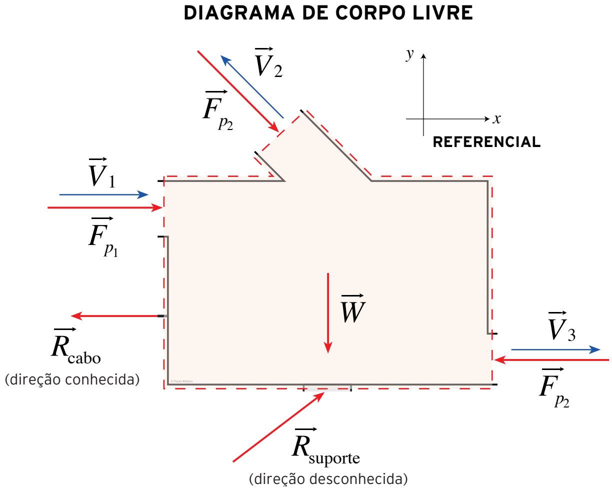
** É uma consequência do teorema da divergência de Gauss: $\oiint_{\text{SC}} (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}})\, dA = \iiint_{\text{VC}} (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV$, mais concretamente, de uma extensão do teorema a campos escalares: $\oiint_{\text{SC}} f\, \hat{\mathbf{n}}\, dA = \iiint_{\text{VC}} \nabla f\, dV$.
Considerando que $p_{\text{man}} = const.$ e, por isso, $\nabla p_{\text{atm}} = 0$, deduz-se:

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{p}} = \oiint_{\text{SC}} (-p\hat{\mathbf{n}})\, dA = -\oiint_{\text{SC}} p\hat{\mathbf{n}}\, dA = -\oiint_{\text{SC}} (p_{\text{man}} + p_{\text{atm}})\hat{\mathbf{n}}\, dA = -\oiint_{\text{SC}} p_{\text{man}}\hat{\mathbf{n}}\, dA - \oiint_{\text{SC}} p_{\text{atm}}\hat{\mathbf{n}}\, dA =$$

$$= -\oiint_{\text{SC}} p_{\text{man}}\hat{\mathbf{n}}\, dA - \iiint_{\text{VC}} \nabla p_{\text{atm}}\, dV = -\oiint_{\text{SC}} p_{\text{man}}\hat{\mathbf{n}}\, dA$$

se as entradas e saídas são unidimensionais a expressão anterior fica: $\mathbf{F}_{\boldsymbol{p}} = -\oiint_{\text{SC}} p_{\text{man}}\hat{\mathbf{n}}\, dA = \sum_{\text{SAIDAS}} (p_{\text{man}} A \hat{\mathbf{n}}) - \sum_{\text{ENTRADAS}} (p_{\text{man}} A \hat{\mathbf{n}})$





BALANÇO ENERGÉTICO

A energia de um sistema, E, é a soma da **energia mecânica (macroscópica)**, E_{mec}, com a **energia interna (microscópica)**, U. Por sua vez, a energia mecânica é a soma da **energia cinética**, $1/2\, mV^2$, com **a energia potencial gravítica**, mgz, **do centro de massa do sistema** (na ausência de outras interações externas de campo). De igual forma, a energia interna é a soma das energias cinéticas das partículas constituintes do sistema (átomos, moléculas, iões, partículas subatómicas) com as energias potenciais das interações entre essas partículas (forças intermoleculares, intramoleculares, forças entre electrões e núcleo – electromagnética - e forças nucleares).
Em síntese, tudo é energia cinética, associada aos vários tipos de movimento††, e energia potencial, associada às quatro interações fundamentais da natureza‡‡.
Além disso, por razões práticas de cálculo, é comum adicionar um termo extra designado por **trabalho de escoamento**, pv, que, tal como o nome sugere, contabiliza a energia, associada às forças de pressão, necessária para manter o fluido em escoamento através de uma superfície de controlo.
Assim, considerando a unidade de massa, a **energia total do fluido em escoamento** será:

Energia total, por unidade de massa, de um fluido em escoamento.

Energia específica de um fluido sem escoamento: e

$$\theta = \frac{p}{\rho} + e = \frac{p}{\rho} + \overbrace{u + \underbrace{\frac{V^2}{2} + gz}_{e_{\text{mec}}}}^{e} = \hat{h} + \frac{V^2}{2} + gz$$

Entalpia específica: $\hat{h}$ Energia mecânica, por unidade de massa: e_{mec}

Trabalho de escoamento.

---

†† Translação, rotação e vibração.

‡‡ Gravitacional, eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca.

A primeira lei da termodinâmica aplicada a um sistema (fechado), traduz-se, em termos de taxas, por:

$$\frac{DE_{\text{SIS}}}{Dt} = \dot{Q} - \dot{W} = \dot{Q} - \left(\dot{W}_{\text{eixo}} + \dot{W}_{\text{press}} + \dot{W}_{\text{visc}} + \dot{W}_{\text{outros}}\right)^{\S\S}$$

isto é, o conteúdo de energia de um sistema pode variar por intermédio de dois processos de transferência: **calor**, energia que atravessa a fronteira do sistema em virtude de uma diferença de temperaturas ou **trabalho**, por ação mecânica, eléctrica ou outra. Nas aplicações correntes, apenas o **trabalho de eixo** e o **trabalho das forças de pressão** (trabalho de escoamento, necessário para "empurrar" o fluido através da superfície de controlo) é considerado.
Porém, num volume de controlo teremos de contar ainda com a energia transportada pelo próprio escoamento. Aplicando o teorema de Reynolds, **o balanço energético para um volume de controlo** fica:

VC FIXO E INDEFORMÁVEL • ENTRADAS E SAÍDAS UNIDIMENSIONAIS

REGIME PERMANENTE

VÁRIAS ENTRADAS E SAÍDAS

$$\dot{Q} - \dot{W}_{\text{eixo}} = \sum_{\text{sai}} \dot{m}\left(\underbrace{\frac{p}{\rho} + u}_{\hat{h}} + \frac{V^2}{2} + gz\right) - \sum_{\text{ent}} \dot{m}\left(\underbrace{\frac{p}{\rho} + u}_{\hat{h}} + \frac{V^2}{2} + gz\right)$$

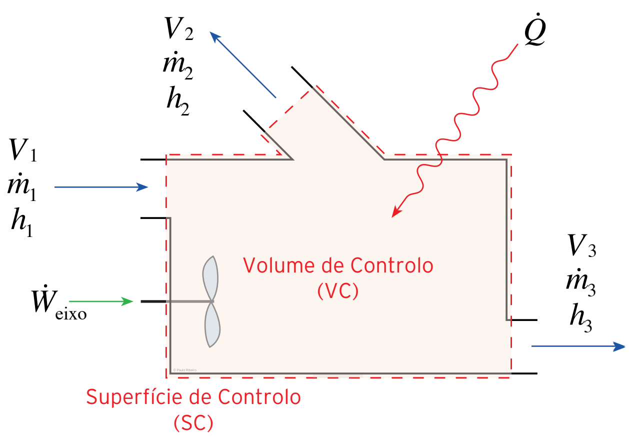
UMA ENTRADA E UMA SAÍDA (CAUDAL ÚNICO)

$$\dot{Q} - \dot{W}_{\text{eixo}} = \dot{m}\left(\underbrace{\hat{h}_2 - \hat{h}_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)}_{q - w_{\text{eixo}}}\right)$$

$$q - w_{\text{eixo}} = \hat{h}_2 - \hat{h}_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

$q = \dfrac{\dot{Q}}{\dot{m}} = \dfrac{Q}{m}$	Calor transferido por unidade de massa	J/kg
$w = \dfrac{\dot{W}}{\dot{m}} = \dfrac{W}{m}$	Trabalho realizado por unidade de massa.	

Repare que o trabalho das forças de pressão (trabalho de escoamento) não aparece no lado esquerdo da equação, junto ao trabalho de eixo porque, de facto, ele já se encontra incluído no termo da entalpia, do lado direito da equação, sendo, por isso, desnecessário efetuar o seu cálculo em separado.



§§ Está implícita a convenção de sinais usualmente utilizada em engenharia de considerar o trabalho realizado pelo sistema como positivo (o que corresponde a uma diminuição da energia do sistema e daí o sinal negativo usado na equação).