Resposta Forçada e Natural

A resposta total de um sistema linear e invariante no tempo (SLIT) a uma dada entrada é um sinal composto pela soma de duas respostas, a resposta forçada e a resposta natural do sistema:

$$y(t) = y(t)_{\text{forçada}} + y(t)_{\text{natural}}$$

Estabilidade baseada na resposta natural

Estabilidade

Um sistema SLIT é estável se a resposta natural tende para zero com o decorrer do tempo.

Instabilidade

Um sistema SLIT é instável se a resposta natural cresce ilimitadamente com o decorrer do tempo.

Estabilidade marginal

Um sistema SLIT é marginalmente estável se a resposta natural não decai nem cresce ilimitadamente mas permanece constante ou oscila com o decorrer do tempo.

Estabilidade BIBO (Bounded Input / Bounded Output), baseada na resposta total

Estabilidade

Um sistema SLIT é estável se *qualquer* entrada limitada produz uma resposta limitada.

Instabilidade

Um sistema SLIT é instável se *alguma* entrada limitada produz uma resposta ilimitada (os sistemas considerados marginalmente estáveis pela definição baseada na resposta natural são, nesta definição, instáveis)

Estabilidade BIBO, baseada nos polos da Função de Transferência

Estabilidade

Um sistema SLIT é estável se *todos* os seus polos (raízes do denominador da função de transferência) têm parte real negativa, isto é, todos os polos situam-se no semiplano complexo esquerdo (SPCE).

Instabilidade

Um sistema SLIT é instável se *pelo menos um* dos seus polos têm parte real positiva, isto é, encontra-se no semiplano complexo direito (SPCD), e/ou tem polos de multiplicidade superior a 1 no eixo imaginário.

Estabilidade marginal

Um sistema SLIT é marginalmente estável se tem polos simples (multiplicidade igual a 1) no eixo imaginário e não tem polos no SPCD.

Critério de Hurwitz (condição necessária mas não suficiente)

Se um SLIT é estável então todos os coeficientes do polinómio denominador da função de transferência (FT) são positivos (ou têm o mesmo sinal). Logo, a contra recíproca diz que, se nem todos os coeficientes do polinómio denominador da FT têm o mesmo sinal então o SLIT é instável.

Exemplos:

$$G_1(s) = \frac{s+3}{s^5+3s^4+5s^3+s^2+2s+4},$$

A FT verifica a condição necessária de estabilidade pelo que nada se pode concluir.

$$G_2(s) = \frac{s+3}{s^5+3s^4+5s^3+s^2-2s+4},$$

A FT não verifica a condição necessária de estabilidade pelo que o sistema correspondente é instável.

Critério de Routh-Hurwitz

O número de polos de um SLIT que se encontram no semiplano complexo direito (SPCD) é igual ao número de mudanças de sinal dos elementos da primeira coluna da tabela de Routh. Se todos os elementos da primeira coluna são positivos então não há mudanças de sinal e, por conseguinte, todos os polos se encontram no SPCE ou no eixo imaginário.

Tabela de Routh

Ilustração, sem perda de generalidade, da construção da tabela de Routh para a seguinte função de transferência de 4ª ordem:

$$G(s) = \frac{N(s)}{a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3}$	$b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3}$	$b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$	$c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$c_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$d_1 = -\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1}$	$d_2 = -\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$d_3 = -\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Exemplo de aplicação:

$$G_1(s) = \frac{s+3}{s^5+3s^4+5s^3+s^2+2s+4}$$

s^5	1	5	2
s^4	3	1	4
s^3	$\frac{3\times5-1\times1}{3} = \frac{14}{3} \xrightarrow{\times\frac{3}{2}} 7$	$\frac{3\times2-1\times4}{3} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\times\frac{3}{2}} 1$	0
s^2	$\frac{7\times1-3\times1}{7} = \frac{4}{7} \xrightarrow{\times7} 4$	$\frac{7\times4-3\times0}{7} = 4 \xrightarrow{\times7} 28$	0
s^1	$\frac{4\times1-7\times28}{4} = -48$	0	0
s^0	28		

Há duas mudanças de sinal (assinaladas na tabela), o que significa que existem 2 polos no SPCD e, portanto, o sistema é instável.

Tabela de Routh (casos especiais)

Zeros apenas na primeira coluna

Se na primeira coluna da tabela de Routh aparecer um zero faz-se a sua substituição por uma variável, por exemplo ε, e completa-se a tabela normalmente, envolvendo essa variável. No final considera-se o limite quando essa variável tende para zero, por valores positivos, isto é $\varepsilon \longrightarrow 0^{+}$, concluindo-se sobre os sinais dos elementos da primeira coluna de acordo com o critério de Routh-Hurwitz.

Exemplo de aplicação:

$$G(s) = \frac{3}{2s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 2s + 1},$$

s^5	2	4	2
s^4	3	6	1
s^3	$\frac{3\times4-2\times6}{3} = \cancel{0} \longrightarrow \varepsilon$	$\frac{3\times2-2\times1}{3} = \frac{4}{3}$	0
s^2	$\frac{\varepsilon\times6-3\times4/3}{\varepsilon} = \frac{6\varepsilon-4}{\varepsilon}$	$\frac{\varepsilon\times1-3\times0}{\varepsilon} = 1$	0
s^1	$\frac{\frac{6\varepsilon-4}{\varepsilon}\times4-\varepsilon\times1}{\frac{6\varepsilon-4}{\varepsilon}} = \frac{24\varepsilon-16-\varepsilon^2}{6\varepsilon-4}$	0	0
s^0	1		

$\varepsilon \longrightarrow 0^{+} \therefore \varepsilon > 0$

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow0^{+}} \frac{6\varepsilon-4}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\longrightarrow0^{+}} \left(6-\frac{4}{\varepsilon}\right) = 6-\frac{4}{0^{+}} = -\infty < 0$$

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow0^{+}} \frac{24\varepsilon-16-\varepsilon^2}{6\varepsilon-4} = \frac{-16}{-4} = 4 > 0$$

Logo, há duas mudanças de sinal, o que significa que existem 2 polos no SPCD e, portanto, o sistema é instável.

Linha de zeros (causada por um polinómio par da factorização do denominador)

Se no desenvolvimento da tabela de Routh surgir uma linha inteira de zeros isso significa que existe um ***polinómio par*** na factorização do denominador. Esse polinómio par é o que se constrói da linha imediatamente anterior à linha de zeros e também se designa por polinómio auxiliar.

Deriva-se o polinómio auxiliar e substitui-se a linha de zeros pelos coeficientes resultantes da derivação dando continuidade à construção da tabela. Daí em diante o critério aplica-se apenas ao polinómio par. Tendo em conta que as raízes de um polinómio par são simétricas em relação à origem e podem ser de 3 tipos:

- sobre o eixo real, $-\sigma, +\sigma$, (reais e simétricas)
- sobre o eixo imaginário, $-j\omega, +j\omega$, (imaginárias puras conjugadas)
- radiais e simétricas, (2 pares de complexos conjugados com parte real simétrica, $-\sigma \pm j\omega, \sigma \pm j\omega$)

conclui-se que, a partir da linha correspondente ao polinómio par até ao fim da tabela:

- se não houver mudanças de sinal o polinómio par não tem raízes no SPCD e, em consequência da simetria, também não pode ter no SPCE, donde todas as raízes (em número igual ao grau, *n*, do polinómio par) se encontram sobre o eixo imaginário;
- se houver *m* mudanças de sinal o polinómio par tem *m* raízes no SPCD e, em consequência da simetria, também tem *m* raízes no SPCE. A diferença $n - 2m$ dá o número de raízes sobre o eixo imaginário;
- Todas as raízes sobre o eixo imaginário são devidas ao polinómio par, logo, não havendo uma linha de zeros também não haverá polos no eixo imaginário.

As linhas anteriores ao polinómio par aplicam-se apenas ao outro polinómio factor do polinómio original. Para esse factor o número de mudanças de sinal dá exclusivamente o número de raízes no SPCD.

Exemplo de aplicação:

$$G(s) = \frac{1}{2s^5 + s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 2s + 1},$$

s^5	2	6	2
s^4	1	3	1
s^3	$\frac{1\times 6 - 2\times 3}{1} = \cancel{0} \longrightarrow 4$	$\frac{1\times 2 - 2\times 1}{3} = \cancel{0} \longrightarrow 6$	0
s^2	$\frac{4\times 3 - 1\times 6}{4} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2} 3$	$\frac{4\times 1 - 1\times 0}{4} = 1 \xrightarrow{\times 2} 2$	0
s^1	$\frac{3\times 6 - 4\times 2}{3} = \frac{10}{3} \xrightarrow{\times 3/10} 1$	0	0
s^0	2		

Polinómio Auxiliar: $P(s) = s^4 + 3s^2 + 1$
Portanto, $P'(s) = 4s^3 + 6s + 0$

Não há mudanças de sinal nos elementos da primeira coluna, o que significa que todos os polos, 5 no total, não se encontram no SPCD, isto é, ou se encontram no SPCE ou estão no eixo imaginário.

Desses 5 polos, 4 são do polinómio auxiliar (polinómio par de grau 4) e, portanto, 1 é do outro polinómio factor.

Como não há mudanças de sinal abaixo da linha do polinómio par, todos os 4 polos se encontram no eixo imaginário. Além disso são de multiplicidade 1 (dado que o polinómio par não é um quadrado perfeito).

Como o outro polinómio não pode ter polos sobre o eixo imaginário e não há mudanças de sinal acima da linha do polinómio par então, como consequência, a restante raiz encontra-se no SPCE.

Concluindo, existe 1 polo no SPCE e 4 polos de multiplicidade 1 no eixo imaginário.
Logo, o sistema é marginalmente estável (BIBO).